12

Под редакцией
И. В. Ященко

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2019

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019

12
Профильный

ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2019. Математика

Производная и первообразная. Исследование функций

Задача 12 (профильный уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2019. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019. — 112 с.

ISBN 978-5-4439-1322-3

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2019. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2019 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2019.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Производная и первообразная. Исследование функций». Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1322-3

От редактора серии

Прежде чем вы начнете работать с тетрадями, дадим некоторые пояснения и советы.

Планируется, что в 2019 году у вас будет возможность выбрать уровень экзамена по математике — базовый или профильный. Вариант базового уровня будет состоять из 20 задач, проверяющих освоение Федерального государственного образовательного стандарта на базовом уровне.

Вариант ЕГЭ профильного уровня состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня сложности по основным темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9—12) и семь с развернутым ответом (задания 13—19).

Рабочие тетради организованы в соответствии со структурой экзамена и позволят вам подготовиться к выполнению всех заданий с кратким ответом, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Профильный уровень предназначен в первую очередь для тех, кому математика требуется при поступлении в вуз. Если вы ориентируетесь на этот уровень, то понимаете, что нужно уметь решать все задания с кратким ответом — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдет меньше времени, чем на задание с развёрнутым решением; обидно терять баллы из-за ошибок в относительно простых задачах.

Кроме того, тренировка на простых задачах позволит вам избежать технических ошибок и при решении задач с полным решением.

Работу с каждым параграфом следует начать с выполнения диагностической работы. Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с решениями, приведёнными в книге. Если какая-то задача или тема вызывает затруднения, следует после повторения материала выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению соответствующих заданий служат диагностические работы, размещённые в конце параграфа.

Работа с серией рабочих тетрадей для подготовки к ЕГЭ по математике позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического изучения математики.

Желаем успеха!

Введение

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Производная и первообразная. Исследование функций» и, в частности, задачи 12 (профильного уровня) Единого государственного экзамена по математике.

Задача представляет собой традиционное для школьных учебников задание на вычисление производных, первообразных или исследование функций: нахождение точек экстремума, экстремумов, наибольших и наименьших значений функций.

В пособие включены задания по указанным темам, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса:

- целые рациональные функции (многочлены),
- дробно-рациональные функции,
- иррациональные функции,
- тригонометрические функции,
- показательная функция,
- логарифмическая функция.

Здесь под иррациональными функциями понимаются функции, заданные формулой, в которой переменная находится под знаком корня n-й степени или имеет дробный показатель степени.

Такое построение пособия позволит, с одной стороны, выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения задач базового уровня и несколько более сложных задач на вычисление производных и первообразных и исследование функций, а с другой — использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения. Кроме того, в пособие включен материал, связанный с вычислением наибольших и наименьших значений функций без применения производной, разбитый на два пункта: «Применение свойств функций» и «Применение стандартных неравенств». Материал второго пункта позволяет лучше подготовиться к решению задач 13, 15, 18 ЕГЭ по математике.

Пособие состоит из трех параграфов и включает 12 диагностических и 28 тренировочных работ, а также разбор задач начальной диагностической работы параграфа с необходимыми методическими рекомендациями. Диагностические работы состоят из 12 заданий (в параграфах 1 и 3 — по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса в соответствии с указанным выше порядком; в параграфе 2 задачи диагностических и тренировочных работ сгруппированы по методам решения). Тренировочные работы состоят из 10 задач для выработки или закрепления навыков решения по каждому типу заданий.

В начале работы с пособием целесообразно выполнить начальную диагностическую работу параграфа, определить, какие задачи вызывают затруднения, и обратиться при необходимости к разбору задач. После этого нужно потренироваться в решении задач каждого типа, выполнив тренировочные работы параграфа. Для завершения подготовки следует сделать диагностические работы, размещенные в конце параграфа, постаравшись решить их без ошибок или с минимальным количеством ошибок. Желательно, чтобы время решения любой из диагностических и тренировочных работ не превышало одного часа.

Подчеркнем, что в пособии рассматриваются задания, в значительной части отвечающие по уровню сложности заданию 12 (профильного уровня) ЕГЭ по математике. Умение решать такие задачи является базовым: без него невозможно продвинуться в решении более сложных задач. Тем не менее, часть включенных в пособие задач несколько сложнее задачи 12 (профильного уровня) демоверсии: их решение позволит нарастить определенную «математическую мускулатуру» и чувствовать себя на экзамене застрахованным от неприятных неожиданностей.

При подготовке к решению задач Единого государственного экзамена с кратким ответом нужно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем чтобы, например, 1 и 7 или 8 и В распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому если есть уверенность в задаче, за которую получен минус, то нужно идти на апелляцию. Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. В этом смысле задание 12 не является исключением: если результатом вычислений явилась обыкновенная дробь, например $\frac{3}{4}$, перед записью ответа в бланк ее нужно перевести в десятичную, т. е. в ответе написать 0,75. Каждый символ (в том числе запятая и знак «минус») записывается в отдельную клеточку, как это показано на полях пособия.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

§ 1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной

Диагностическая работа

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x \quad \text{на отрезке } [0;\,4].$$

3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x + \frac{9}{x} \quad \text{на отрезке } [-4;\,-1].$$

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \quad \text{на отрезке } [1;\,9].$$

7. Найдите точку минимума функции

$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4 \quad \text{на отрезке } \left[0;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 13)e^{x-12} \quad \text{на отрезке } [11;\,13].$$

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x + 3)$$

на отрезке $[-2{,}5;\,0]$.

Методические рекомендации

Можно выделить следующие основные группы задач по теме, вынесенной в название параграфа:

• исследование функции на экстремумы;

• исследование функции на возрастание/убывание;

• исследование функции на наибольшие и наименьшие значения (в том числе на отрезке);

• исследование функции с помощью графика ее производной (чтение графика производной).

Разница между первыми тремя и последней группами задач заключается лишь в способе задания функции. В более традиционных для школьных учебников задачах (первые три группы задач) функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. Именно эти задачи и будут рассматриваться в пособии. В менее традиционных задачах, ставших очень популярными в последние годы (в том числе и благодаря ЕГЭ по математике), выводы о промежутках возрастания и убывания (т. е. промежутках монотонности), экстремумах функции, ее наименьших или наибольших значениях нужно сделать, исследуя заданный график производной этой функции.

Для успешного решения задач по теме необходимо уверенное владение навыками вычисления производных и решения неравенств. Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале (*достаточный признак возрастания функции*). *Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале* (*достаточный признак убывания функции*).

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка максимума функции f* (*упрощенная формулировка*: *если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*).

Признак минимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка минимума функции f* (*упрощенная формулировка*: *если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*).

Условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Хотя эта функция определена в точке $x = 0$ и в этой точке производная $f'(x) = 2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, иногда учащиеся называют, например, точку минимума функции $y = x^2 + 3$ не «точка 0», а «точка $(0; 3)$», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется *минимумом* функции, а значение в точке максимума — *максимумом* функции.

Если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y = \operatorname{tg} x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на всей области определения», «функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$». Если бы эти утверждения были верны, то из неравенства $2 > 1$ следовало бы, что $\operatorname{tg} 2 > \operatorname{tg} 1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y = \frac{1}{x}$: вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $2 > -3$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{2} < \frac{1}{-3}$, и, следовательно, функция $y = \frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя запятую, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств. Впрочем, это совет скорее на будущее, на случай, если задача на исследование функций когда-нибудь попадет во вторую часть ЕГЭ по математике и будет требовать полного решения.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно наименьшим) значением функции на отрезке. Для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(0; 1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0) = x_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1 \in (x_0; 1)$ значение функции окажется больше, чем x_0, поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ является возрастающей.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ обычно обозначаются символами $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ соответственно.

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что если наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны числам m и M соответственно, то множеством значений функции на данном отрезке является отрезок $[m; M]$. Поэтому к решению задачи на отыскание множества значений функции, непрерывной на отрезке, также применим алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty; 1]$, на котором функция убывает, и $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак. Напротив, при исследовании функции $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y = x^3 - 3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5; 2]$ является вовсе не $y(1) = -2$ (значение в точке минимума), а $y(-5) = -110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точек максимума.

Для решения задачи 12 может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: *если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке*. Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке $(a; b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т. е. функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом. Например, пусть требуется найти наибольшее значение функции

$$y = 6\sqrt{2}\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Производная этой функции есть $y' = 6\sqrt{2}\cos x - \frac{40}{\pi}$. Поскольку $\pi < 4$, получим, что $\frac{40}{\pi} > 10$. Но $6\sqrt{2}\cos x = \sqrt{72}\cos x < \sqrt{81}\cos x$, т. е.

$$6\sqrt{2}\cos x < 9\cos x \leqslant 9.$$

Поэтому $y' < 0$ при любом действительном значении аргумента. Значит, функция $y = 9\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$ является убывающей на всей числовой прямой и своего наибольшего значения на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ достигает в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$\max_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{40}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + 49 = 45.$$

Особое место в ряду задач на вычисление наибольших и наименьших значений занимают «текстовые» задачи (как правило, с геометрическим содержанием). Обычно в таких задачах требуется найти наибольшее или наименьшее возможное значение некоторой величины. При этом искомая величина рассматривается как функция некоторой другой величины. Так, например, если известен периметр p прямоугольника, то его площадь можно рассматривать как функцию $S(x) = x \cdot \frac{p-2x}{2}$, где x — одна из сторон прямоугольника. Исследовав эту функцию, можно установить, какой из всех возможных прямоугольников данного периметра имеет наибольшую площадь. Для рассматриваемой задачи это можно сделать и без применения производной, поскольку функция площади является квадратичной функцией с отрицательным коэффициентом при второй степени аргумента. Поэтому наибольшее значение достигается в абсциссе вершины параболы, являющейся графиком функции, т. е. в точке $x = \frac{p}{4}$. Следовательно, одна из сторон прямоугольника равна четверти периметра. Но тогда и любая другая сторона будет равна $\frac{p}{4}$. Таким образом, из всех прямоугольников данного периметра p наибольшую площадь $\frac{p^2}{16}$ имеет квадрат. Другие задачи на вычисление наибольших и наименьших значений функции без применения производной будут рассмотрены в следующем параграфе.

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

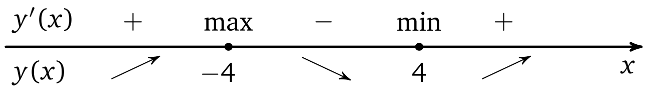
Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 48.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители:

$$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4).$$

В точке $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.



Ответ: -4.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдем производную функции

$$y = x^3 - 27x$$

и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$y' = 3x^2 - 27, \quad y' = 3(x-3)(x+3).$$

Производная меняет знак в точках $x = -3$ и $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только точка $x = 3$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x = 3$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Ответы:

T1.1

T1.2

T1.3

T1.4

T1.5

T1.6

T1.7

T1.8

T1.9

T1.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 1

T1.1. Найдите $f'(0)$, если
$$f(x) = 3x^4 - 15x^2 - 4x + 16.$$

T1.2. Найдите $f'(-1)$, если
$$f(x) = x^5 + x^7 + x^{12}.$$

T1.3. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x) = x^3 x^4 x^7.$$

T1.4. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x) = (x-5)^{14}.$$

T1.5. Найдите $f'(-3)$, если
$$f(x) = 3(x+4)^5.$$

T1.6. Найдите $f'(4)$, если
$$f(x) = (3x-11)^8.$$

T1.7. Найдите $f'(-5)$, если
$$f(x) = (x+4)^6 + (x+6)^4.$$

T1.8. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = (x-5)(x+5)^4.$$

T1.9. Найдите $y'(-4)$, если
$$y = (x+3)^7(x+7)^3.$$

T1.10. Найдите $f'(-3)$, если
$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3).$$

Тренировочная работа 2

Т2.1. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Т2.2. Найдите точку максимума функции
$$y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3.$$

Т2.3. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x - 3.$$

Т2.4. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + x^2 - 8x - 7.$$

Т2.5. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 12.$$

Т2.6. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 8x^2 + 16x + 3.$$

Т2.7. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 + x^2 - 16x + 5.$$

Т2.8. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 4x^2 + 4x + 4.$$

Т2.9. Найдите точку минимума функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 16x + 8.$$

Т2.10. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2.$$

Ответы:

Т2.1

Т2.2

Т2.3

Т2.4

Т2.5

Т2.6

Т2.7

Т2.8

Т2.9

Т2.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 3

T3.1

T3.1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 3x^2 - 2x^3 + 1$$
на отрезке $[-4; 0]$.

T3.2

T3.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4x^2 - 4x - x^3$$
на отрезке $[1; 3]$.

T3.3

T3.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 2x^2 + x + 5$$
на отрезке $[1; 4]$.

T3.4

T3.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 + x^2 - 8x - 8$$
на отрезке $[-3; 0]$.

T3.5

T3.5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 11$$
на отрезке $[0; 6]$.

T3.6

T3.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = -(x+6)(x^2-36)$$
на отрезке $[-4; 3]$.

T3.7

T3.7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x-3)(x+3)^2$$
на отрезке $[-2; 2]$.

T3.8

T3.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 2\frac{23}{27} + (x-2)^2 + (x-2)^3$$
на отрезке $[1; 2]$.

T3.9

T3.9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (1-x)(x-4)^2$$
на отрезке $[0; 3]$.

T3.10

T3.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-10)(x^2-11x+10)$$
на отрезке $[-1; 7]$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 диагностической работы

3. Найдите точку минимума функции

$$y=\frac{25}{x}+x+25.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y'=-\frac{25}{x^2}+1.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, приведя полученное выражение к общему знаменателю и разложив числитель на множители:

$$\frac{x^2-25}{x^2}=\frac{(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

В точке $x=5$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума.

Ответ: 5.

4. Найдите наибольшее значение функции $y=x+\frac{9}{x}$ на отрезке $[-4;-1]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y'=1-\frac{9}{x^2}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и разложим числитель на множители:

$$\frac{x^2-9}{x^2}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Отрезку $[-4;-1]$ принадлежит только точка $x=-3$, в которой производная меняет знак с плюса на минус. Таким образом, точка $x=-3$ является точкой максимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наибольшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-3)=-3+\frac{9}{-3}=-6.$$

Ответ: -6.

Ответы:

T4.1

T4.2

T4.3

T4.4

T4.5

T4.6

T4.7

T4.8

T4.9

T4.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 4

T4.1. Найдите $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, если
$$f(x) = 3x^{-2}.$$

T4.2. Найдите $y'(1)$, если
$$y(x) = \frac{7}{x^3}.$$

T4.3. Найдите $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, если
$$f(x) = 5x + 9x^{-1} + 8.$$

T4.4. Найдите $g'(-1)$, если
$$g(x) = \frac{4x^2 + 3x + 7}{x}.$$

T4.5. Найдите $y'(-10)$, если
$$y = 8(x+9)^{-10}.$$

T4.6. Найдите $g'(7)$, если
$$g(x) = \frac{7}{(x-6)^5}.$$

T4.7. Найдите $f'(-4{,}5)$, если
$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}.$$

T4.8. Найдите $y'(2)$, если
$$y(x) = \frac{5}{(4x-9)^3}.$$

T4.9. Найдите $g'(2)$, если
$$g(x) = \frac{5}{4x^2-15}.$$

T4.10. Найдите $y'(-3)$, если
$$y = \frac{7x+2}{2x+7}.$$

Тренировочная работа 5

Т5.1. Найдите точку минимума функции

$$y = 16 - \frac{16}{x} - x.$$

Т5.2. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}.$$

Т5.3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{x^2 + 64}{x}.$$

Т5.4. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 - 0{,}5x - \frac{2}{x^2}.$$

Т5.5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{4}{x^2} + x + 4.$$

Т5.6. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{27}{x} - 0{,}5x^2 + 6.$$

Т5.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 0{,}5x^2 + \frac{1}{x} + 1{,}5.$$

Т5.8. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{16}{x} - x^2 + 9.$$

Т5.9. Найдите точку минимума функции

$$y = x^2 - \frac{54}{x} + 45.$$

Т5.10. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{128}{x} - x^2 + 100.$$

Ответы:

Т5.1

Т5.2

Т5.3

Т5.4

Т5.5

Т5.6

Т5.7

Т5.8

Т5.9

Т5.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T6.1

T6.2

T6.3

T6.4

T6.5

T6.6

T6.7

T6.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 6

T6.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+16}{x} \quad \text{на отрезке } [2;\, 8].$$

T6.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2+7x+49}{x}$$

на отрезке $[-14;\, -1]$.

T6.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2-6x+36}{x}$$

на отрезке $[3;\, 9]$.

T6.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2-8x+64}{x}$$

на отрезке $[-16;\, -4]$.

T6.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+10x+100}{x}$$

на отрезке $[1;\, 20]$.

T6.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^3+x^2+9}{x} - x^2$$

на отрезке $[-9;\, -1]$.

T6.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{25+x^2-x^3}{x}$$

на отрезке $[1;\, 10]$.

T6.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{16-x^3}{x}$$

на отрезке $[-4;\, -1]$.

Ответы:

Т6.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3 - 54}{x}$$

на отрезке $[-6; -1]$.

Т6.9

Т6.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{250 + 50x - x^3}{x}$$

на отрезке $[-10; -1]$.

Т6.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Иррациональные функции. Решения задач 5 и 6 диагностической работы

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 6 - 3x^{\frac{1}{2}}, \quad y' = 3\big(2 - \sqrt{x}\big).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, т. е. $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 4.

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3, \quad y' = \frac{3}{2}\big(\sqrt{x} - 2\big).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, т. е. $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = -3.$$

Ответ: -3.

Ответы:

Тренировочная работа 7

Т7.1. Найдите $f'(9)$, если
$$f(x) = 18\sqrt{x}.$$

Т7.2. Найдите $g'(8)$, если
$$g(x) = 20\sqrt{x+17}.$$

Т7.3. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = \sqrt{4x-7}.$$

Т7.4. Найдите $y'(5)$, если
$$y(x) = 7\sqrt{6x+19}.$$

Т7.5. Найдите $y'(1)$, если
$$y(x) = 49x^{\frac{5}{7}}.$$

Т7.6. Найдите $g'(18)$, если
$$g(x) = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{8}{9}} \cdot x^{\frac{17}{18}}.$$

Т7.7. Найдите $g'(1)$, если
$$g(x) = 48\sqrt[8]{x}\sqrt[12]{x}.$$

Т7.8. Найдите $f'(1)$, если
$$f(x) = 15\sqrt[5]{x} + 34\sqrt[17]{x}.$$

Т7.9. Найдите $g'(1)$, если
$$g(x) = \frac{x^{7,2} + x^{2,7}}{x^{4,5}}.$$

Т7.10. Найдите $y'(1)$, если
$$y = \frac{x^{2,6} - 9}{x^{1,3} - 3}.$$

Т7.1

Т7.2

Т7.3

Т7.4

Т7.5

Т7.6

Т7.7

Т7.8

Т7.9

Т7.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T8.1

T8.2

T8.3

T8.4

T8.5

T8.6

T8.7

T8.8

T8.9

T8.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 8

T8.1. Найдите точку минимума функции
$$y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-6x+1.$$

T8.2. Найдите точку максимума функции
$$y=2+3x-x\sqrt{x}.$$

T8.3. Найдите точку минимума функции
$$y=x\sqrt{x}-1{,}5x+2.$$

T8.4. Найдите точку максимума функции
$$y=7+8x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}.$$

T8.5. Найдите точку минимума функции
$$y=(x-9)\sqrt{x}.$$

T8.6. Найдите точку максимума функции
$$y=(6-x)\sqrt{x}.$$

T8.7. Найдите точку минимума функции
$$y=(x-12)\sqrt{x}.$$

T8.8. Найдите точку максимума функции
$$y=(15-x)\sqrt{x}.$$

T8.9. Найдите точку минимума функции
$$y=x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2.$$

T8.10. Найдите точку максимума функции
$$y=11+6\sqrt{x}-2x\sqrt{x}.$$

Ответы:

Тренировочная работа 9

T9.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-12)\sqrt{x} \quad \text{на отрезке } [1; 9].$$

T9.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7-6\sqrt{x}-5x^3 \quad \text{на отрезке } [1; 4].$$

T9.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3+5\sqrt{x}+7 \quad \text{на отрезке } [4; 16].$$

T9.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (7-x)\sqrt{x+5} \quad \text{на отрезке } [-4; 4].$$

T9.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-11)\sqrt{x+1} \quad \text{на отрезке } [0; 8].$$

T9.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (10-x)\sqrt{x+2} \quad \text{на отрезке } [-1; 7].$$

T9.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-15)\sqrt{x+12}+6 \quad \text{на отрезке } [-8; 4].$$

T9.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (8-x)\sqrt{x+4}+1 \quad \text{на отрезке } [-3; 5].$$

T9.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2(x-20)\sqrt{x+7}+5 \quad \text{на отрезке } [-6; 2].$$

T9.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5-(x-14)\sqrt{x+13} \quad \text{на отрезке } [-9; 3].$$

T9.1

T9.2

T9.3

T9.4

T9.5

T9.6

T9.7

T9.8

T9.9

T9.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы

7. Найдите точку минимума функции

$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (0{,}5 - x)'\cos x + (0{,}5 - x)(\sin x)' + (\cos x)',$$

т. е.

$$y' = -\cos x - (0{,}5 - x)\sin x + \cos x,$$

и, следовательно, $y' = -(0{,}5 - x)\sin x$, или $y' = (x - 0{,}5)\sin x$. На промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль только при $x = 0{,}5$, поскольку $\sin x > 0$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. В точке $x = 0{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, и эта точка является единственной точкой минимума на данном промежутке.

Ответ: 0,5.

8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$$

на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = -4\sqrt{2}\sin x + 4.$$

Производная обращается в нуль, если

$$4\sqrt{2}\sin x = 4, \quad \text{т. е. } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отрезку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежит единственный корень $x = \dfrac{\pi}{4}$ полученного уравнения. В точке $x = \dfrac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi + 4, \quad \text{т. е. } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8.$$

Ответ: 8.

Тренировочная работа 10

Т10.1. Найдите $f'\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, если
$$f(x) = 2\sin x + 7\cos x.$$

Т10.2. Найдите $y'\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, если
$$y(x) = 9\sqrt{2}\sin x - 7\operatorname{tg} x.$$

Т10.3. Найдите $g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, если
$$g(x) = 9\operatorname{tg} x - 8\cos x.$$

Т10.4. Найдите $y'\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$, если
$$y = 3\cos 7x.$$

Т10.5. Найдите $f'\left(\frac{1}{13}\right)$, если
$$f(x) = \frac{3}{\pi}\sin(13\pi x).$$

Т10.6. Найдите $y'\left(\frac{11\pi}{4}\right)$, если
$$y = 22\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{11}\right).$$

Т10.7. Найдите $g'\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, если
$$g(x) = \frac{12}{\sin x}.$$

Т10.8. Найдите $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, если
$$f(x) = \frac{18}{\cos x}.$$

Т10.9. Найдите $y'\left(\frac{\pi}{28}\right)$, если
$$y(x) = \sin^2 7x - \cos^2 7x.$$

Т10.10. Найдите $g'\left(\frac{\pi}{36}\right)$, если
$$g(x) = \frac{\sin 24x}{\cos 12x}.$$

Ответы:

Т10.1

Т10.2

Т10.3

Т10.4

Т10.5

Т10.6

Т10.7

Т10.8

Т10.9

Т10.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T11.1

T11.2

T11.3

T11.4

T11.5

T11.6

T11.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 11

T11.1. Найдите точку максимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - 3\sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

T11.2. Найдите точку минимума функции

$$y = (x - 1{,}5)\sin x + \cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.3. Найдите точку максимума функции

$$y = (6 - 5x)\sin x - 5\cos x + 6,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.4. Найдите точку минимума функции

$$y = 2\cos x - (1 - 2x)\sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 2\cos x - (5 - 2x)\sin x + 4,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

T11.6. Найдите точку минимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - \frac{3}{4}\sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.7. Найдите точку максимума функции

$$y = \sin x - 4\cos x - 4x\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.8. Найдите точку минимума функции

$$y = 3(x-1{,}25)\sin x + 3\cos x + 2,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (2-5x)\sin x - 5\cos x + 3,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

T11.10. Найдите точку минимума функции

$$y = 4\sin x + 2(5-2x)\cos x - 7,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Ответы:

T11.8

T11.9

T11.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T12.1

T12.2

T12.3

T12.4

T12.5

T12.6

T12.7

T12.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 12

T12.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9 + \sqrt{3}\pi - 3\sqrt{3}x - 6\cos x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

T12.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

T12.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\cos x - \frac{24}{\pi}x + 9$$

на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

T12.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9\operatorname{tg} x - 8x + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

T12.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 5\operatorname{tg} x - 5\pi + 4$$

на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

T12.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\operatorname{tg} x - 4x + \pi + 9$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

T12.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 2\cos x - \sqrt{3}x - 5$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

T12.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответы:

T12.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7\sin x + 8\cos x - 17x - 18$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

T12.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sin x - 5\cos x + 11x - 13$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

T12.9

T12.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Показательная функция. Решения задач 9 и 10 диагностической работы

9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (x^2 - 17x - 17)' e^{7-x} + (x^2 - 17x - 17)\left(e^{7-x}\right)',$$

т. е.

$$y' = (2x - 17)e^{7-x} + (x^2 - 17x - 17)\left(-e^{7-x}\right),$$

и, следовательно,

$$y' = -(x^2 - 19x)e^{7-x}, \quad \text{или} \quad y' = -x(x - 19)e^{7-x}.$$

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 19$, причем меняет знак с плюса на минус в точке $x = 19$. Эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 19.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x - 13)e^{x-12}$$

на отрезке [11; 13].

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y' = (x - 13)' e^{x-12} + (x - 13)(e^{x-12})',$$

т. е.

$$y' = e^{x-12} + (x - 13)e^{x-12},$$

и, следовательно, $y' = (x - 12)e^{x-12}$. В точке $x = 12$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке, и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(12) = (12 - 13)e^{12-12} = -1.$$

Ответ: -1.

Ответы:

Тренировочная работа 13

Т13.1. Найдите $f'(2)$, если

$$f(x)=\frac{7^x}{\ln 7}.$$

Т13.2. Найдите $y'(-2)$, если

$$y=\frac{2^x\cdot 5^x}{\ln 10}.$$

Т13.3. Найдите $f'(-6)$, если

$$f(x)=\frac{6^{x+8}}{\ln 6}.$$

Т13.4. Найдите $y'(-2)$, если

$$y=\frac{9^{-x}}{\ln 9}.$$

Т13.5. Найдите $f'(14)$, если

$$f(x)=\frac{7\cdot 6^{\frac{x}{7}}}{\ln 6}.$$

Т13.6. Найдите $y'(-2{,}5)$, если

$$y=e^{2x+5}.$$

Т13.7. Найдите $f'(-18)$, если

$$f(x)=(x+8)e^{x+18}.$$

Т13.8. Найдите $f'(4)$, если

$$f(x)=\frac{x+3}{e^{x-4}}.$$

Т13.9. Найдите $y'(2)$, если

$$y=\frac{7^{3x-5}}{\ln 7}.$$

Т13.10. Найдите $y'(5)$, если

$$y=\frac{15\sqrt[5]{15^x}}{\ln 15}.$$

Т13.1

Т13.2

Т13.3

Т13.4

Т13.5

Т13.6

Т13.7

Т13.8

Т13.9

Т13.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T14.1

T14.2

T14.3

T14.4

T14.5

T14.6

T14.7

T14.8

T14.9

T14.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 14

T14.1. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-5}.$$

T14.2. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 8x + 8)e^{x-8}.$$

T14.3. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 15x + 15)e^{x-15}.$$

T14.4. Найдите точку максимума функции

$$y = (x + 3)^2 e^{3-x}.$$

T14.5. Найдите точку минимума функции

$$y = -(x - 4)^2 e^{x-4}.$$

T14.6. Найдите точку максимума функции

$$y = (x - 6)^2 e^{x-6}.$$

T14.7. Найдите точку минимума функции

$$y = (4 - x)e^{5-x}.$$

T14.8. Найдите точку максимума функции

$$y = (x - 6)e^{7-x}.$$

T14.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 3)e^{x-3}.$$

T14.10. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 + 2x + 1)e^{x+4}.$$

Тренировочная работа 15

T15.1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 8 + (x-7)e^{x-6}$$
на отрезке [3; 9].

T15.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-11)e^{12-x} + 13$$
на отрезке [5; 15].

T15.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 5 - (x-3)e^{4-x}$$
на отрезке [0; 7].

T15.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-4)^2 e^{x-2}$$
на отрезке [1; 3].

T15.5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2 - (x-3)^2 e^{5-x}$$
на отрезке [4; 6].

T15.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 6 + (x-7)^2 e^{x-5}$$
на отрезке [4; 6].

T15.7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 4 - (x-4)^2 e^{x-2}$$
на отрезке [1; 3].

T15.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-6)^2 e^{8-x}$$
на отрезке [7; 9].

T15.9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-3}$$
на отрезке [1; 5].

T15.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (3 - x^2)e^{x-1}$$
на отрезке [0; 2].

Ответы:

T15.1

T15.2

T15.3

T15.4

T15.5

T15.6

T15.7

T15.8

T15.9

T15.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 диагностической работы

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

Решение. Функция определена на $(0; +\infty)$. Найдем производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{5}{x}, \quad \text{т. е. } y' = \frac{x-5}{x}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = 5$, причем знак производной в этой точке меняется с минуса на плюс. Следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума данной функции.

Ответ: 5.

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x+3)$$

на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = -7 + \frac{7}{x+3},$$

т. е.

$$y' = -7\frac{x+2}{x+3}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = -2$, причем знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке, и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-2) = 5 - 7 \cdot (-2) + 7\ln(-2+3) = 19.$$

Ответ: 19.

Ответы:

Тренировочная работа 16

T16.1. Найдите $f'(7)$, если
$$f(x) = 28\ln x.$$

T16.2. Найдите $y'(-7)$, если
$$y = 15\ln(x+10).$$

T16.3. Найдите $f'(5)$, если
$$f(x) = \ln(6x-5).$$

T16.4. Найдите $y'(5)$, если
$$y = \ln\frac{x-4}{x+5}.$$

T16.5. Найдите $f'(-4)$, если
$$f(x) = 5x + 4\ln(x+6).$$

T16.6. Найдите $y'(5)$, если
$$y = 3x\ln(x-4).$$

T16.7. Найдите $f'(-2)$, если
$$f(x) = 4x^2\ln(x+3).$$

T16.8. Найдите $f'(2)$, если
$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x+2}.$$

T16.9. Найдите $y'(3)$, если
$$y = 6x + \log_5(x+5) - \frac{x^2}{48\ln 5}.$$

T16.10. Найдите $y'(6)$, если
$$y = 5x^2 + \frac{x}{\ln 7} - 6\log_7 x.$$

T16.1

T16.2

T16.3

T16.4

T16.5

T16.6

T16.7

T16.8

T16.9

T16.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T17.1

T17.2

T17.3

T17.4

T17.5

T17.6

T17.7

T17.8

T17.9

T17.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 17

T17.1. Найдите точку максимума функции

$$y = 2\ln x - 5x + 7.$$

T17.2. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x-8) - x + 5.$$

T17.3. Найдите точку минимума функции

$$y = x - \ln(x-7) + 7.$$

T17.4. Найдите точку максимума функции

$$y = 4\ln(x-3) - 2x + 3.$$

T17.5. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 5\ln(x-7).$$

T17.6. Найдите точку максимума функции

$$y = 18\ln x - x^2.$$

T17.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 7\ln(x-8) + 5.$$

T17.8. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x+5) - 5x + 5.$$

T17.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x-3)^2 - 8\ln x.$$

T17.10. Найдите точку максимума функции

$$y = 6\ln x - (x-2)^2.$$

Ответы:

Тренировочная работа 18

T18.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5x - \ln(x+5)^5 \quad \text{на отрезке } [-4{,}5;\, 1].$$

T18.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3\ln(x+2) - 3x + 10 \quad \text{на отрезке } [-1{,}5;\, 0].$$

T18.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = -x^2 + 20x - 18\ln x \quad \text{на отрезке } [0{,}1;\, 8{,}1].$$

T18.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - 7x + \ln(7x) \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{13};\, \frac{1}{3}\right].$$

T18.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 2\ln x + 1 \quad \text{на отрезке } [0{,}3;\, 3{,}3].$$

T18.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(13x) - 13x + 13 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{15};\, \frac{1}{11}\right].$$

T18.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 11x + 5\ln x + 7 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{11}{12};\, \frac{13}{12}\right].$$

T18.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - \ln x + 5x - 2x^2 \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{2};\, \frac{7}{6}\right].$$

T18.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x \quad \text{на отрезке } [0{,}8;\, 1{,}2].$$

T18.10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 - x^2 + 7x - 5\ln x \quad \text{на отрезке } \left[\frac{1}{8};\, \frac{9}{8}\right].$$

T18.1

T18.2

T18.3

T18.4

T18.5

T18.6

T18.7

T18.8

T18.9

T18.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Диагностическая работа 1

Д1.1

Д1.1. Найдите точку минимума функции
$$y = 7 + 12x - x^3.$$

Д1.2

Д1.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 3x + 4$$
на отрезке $[-2; 0]$.

Д1.3

Д1.3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{16}{x} + x + 3.$$

Д1.4

Д1.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{36}{x}$$
на отрезке $[1; 9]$.

Д1.5

Д1.5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1.$$

Д1.6

Д1.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$$
на отрезке $[0; 4]$.

Д1.7

Д1.7. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д1.8

Д1.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 6\sin x - 9x + 5$$
на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д1.9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-7)e^{x+7}.$$

Д1.9

Д1.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-9)e^{10-x}$$
на отрезке $[-11; 11]$.

Д1.10

Д1.11. Найдите точку максимума функции
$$y = \ln x - 2x.$$

Д1.11

Д1.12. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 4x - 4\ln x + 5$$
на отрезке $[0{,}5; 5{,}5]$.

Д1.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д2.1

Д2.2

Д2.3

Д2.4

Д2.5

Д2.6

Д2.7

Д2.8

Д2.9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 2

Д2.1. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}.$$

Д2.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 6x^2$$

на отрезке $[-3; 3]$.

Д2.3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{49}{x} + x + 49.$$

Д2.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x + \frac{4}{x} + 4$$

на отрезке $[-4; -1]$.

Д2.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 18x - 4x^{\frac{3}{2}}.$$

Д2.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6x - x\sqrt{x} + 1$$

на отрезке $[9; 25]$.

Д2.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 5\sin x - 5(x-1)\cos x + 4,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д2.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Д2.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}.$$

Д2.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4 + (x-5)e^{6-x}$$

на отрезке [1; 8].

Д2.11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 7\ln x + 6.$$

Д2.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\ln x - 5x + 7$$

на отрезке [0,7; 1,7].

Ответы:

Д2.10

Д2.11

Д2.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Диагностическая работа 3

Д3.1

Д3.2

Д3.3

Д3.4

Д3.5

Д3.6

Д3.7

Д3.8

Д3.9

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Д3.1. Найдите точку минимума функции
$$y=\frac{x^3}{3}-9x-7.$$

Д3.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y=9x^2-x^3$$
на отрезке $[1; 10]$.

Д3.3. Найдите точку максимума функции
$$y=\frac{9}{x}+x+9.$$

Д3.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y=x+\frac{64}{x}+8$$
на отрезке $[4; 16]$.

Д3.5. Найдите точку максимума функции
$$y=2+5x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Д3.6. Найдите наименьшее значение функции
$$y=x\sqrt{x}-12x+11$$
на отрезке $[36; 81]$.

Д3.7. Найдите точку минимума функции
$$y=2\cos x+\sin x-x\cos x,$$
принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Д3.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y=11x-5\cos x+2$$
на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Д3.9. Найдите точку максимума функции
$$y=(x+8)e^{8-x}.$$

Ответы:

Д3.10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x+4)e^{x+5}$$

на отрезке $[-9; 9]$.

Д3.10

Д3.11. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 5\ln x + 3.$$

Д3.11

Д3.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(x+3)^3 - 3x$$

на отрезке $[-2{,}5; 2{,}5]$.

Д3.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д4.1

Д4.2

Д4.3

Д4.4

Д4.5

Д4.6

Д4.7

Д4.8

Д4.9

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 4

Д4.1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5.$$

Д4.2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

на отрезке $[1; 4]$.

Д4.3. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{x^2 + 225}{x}.$$

Д4.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 + 25}{x}$$

на отрезке $[-10; -1]$.

Д4.5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 5.$$

Д4.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (27 - x)\sqrt{x}$$

на отрезке $[1; 16]$.

Д4.7. Найдите точку максимума функции

$$y = 3 - 4\sin x - (5 - 4x)\cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д4.8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2\sin x + 7x - 11$$

на отрезке $[0; 3\pi]$.

Д4.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x + 5)e^{x-5}.$$

Ответы:

Д4.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (8 - x)e^{x-7}$$

на отрезке [3; 10].

Д4.10

Д4.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x + 2) - x + 3.$$

Д4.11

Д4.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2x - 2\ln(x + 3) + 3$$

на отрезке [−2,5; 1].

Д4.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д5.1

Д5.2

Д5.3

Д5.4

Д5.5

Д5.6

Д5.7

Д5.8

Д5.9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 5

Д5.1. Найдите точку минимума функции
$$y = (x-5)^2(x+3)-2.$$

Д5.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x^5 - 5x^3 + 18$$
на отрезке $[-2;\, 0]$.

Д5.3. Найдите точку максимума функции
$$y = -\frac{x}{x^2+16}.$$

Д5.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2x + \frac{800}{x} + 11$$
на отрезке $[0{,}5;\, 30]$.

Д5.5. Найдите точку минимума функции
$$y = x\sqrt{x} - 30x + 26.$$

Д5.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x + 7$$
на отрезке $[5;\, 10]$.

Д5.7. Найдите точку максимума функции
$$y = (4x-6)\cos x - 4\sin x + 1,$$
принадлежащую промежутку $\left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$.

Д5.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = -4x + 2\operatorname{tg} x + \pi + 1$$
на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\, \frac{\pi}{3}\right]$.

Д5.9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x^2 - 48x + 48)e^{x-48}.$$

Д5.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = e^{2x} - 4e^{x} + 6$$

на отрезке $[0; 3]$.

Д5.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln x - 10x.$$

Д5.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x^2 - 12x + 4\ln x - 10$$

на отрезке $\left[\frac{12}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

Ответы:

Д5.10

Д5.11

Д5.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

§ 2. Вычисление наибольших и наименьших значений функций без применения производной

Диагностическая работа

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-2}.$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\log_2(1-x-x^2).$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=9^x-2\cdot 3^x \quad \text{на отрезке } [-1;\,2].$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2\sin x-\cos 2x+\cos^2 x.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{4x-1}{x^2-2x+2}.$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}.$$

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y=3^{2x-1}+4\cdot 3^{3-2x}.$$

8. Найдите наименьшее значение функции

$$y=|x^2-x|+|x+1|.$$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\sin 3x+\cos 3x-2.$$

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+4}.$$

11. Найдите наибольшее значение функции

$$y=2x+\sqrt{1-4x^2}.$$

12. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\log_{0,5}\left(\frac{\sqrt{4x^4-3x^2+9}-\sqrt{4x^4-8x^2+9}}{x}\right)$$

на интервале $(0;\,\infty)$.

Методические рекомендации

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции (как, впрочем, и любой другой алгоритм) не является единственным способом решения предложенной задачи. Можно, например, исследовать функцию на монотонность на данном отрезке и исходя из этого исследования найти наибольшее и наименьшее значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения линейной или квадратичной функции на отрезке, вовсе не обязательно применять алгоритм исследования функции с помощью производной: достаточно ограничиться известными свойствами линейной и квадратичной функций. Для функции $y=-7x+3$ наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[-1;\,2]$ будут соответственно числа $y(-1)=10$ и $y(2)=-11$, так как функция убывает на данном отрезке. При вычислении наибольшего и наименьшего значений функции $y=x^2-2x-5$ на отрезке $[0;\,7]$ можно поступить следующим образом. Абсцисса $x_0=1$ вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y=x^2-2x-5$, принадлежит отрезку $[0;\,7]$, поэтому наименьшего значения эта функция достигает в точке $x_0=1$ (это значение: $y(1)=-6$), а наибольшего — в том из концов отрезка $[0;\,7]$, который наиболее удален от x_0, т. е. при $x=7$ (это значение легко вычислить: $y(7)=30$).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2\sin 3x+1$ на отрезке $[2000;\,2011]$, достаточно заметить, что длина данного отрезка больше периода функции и, следовательно, наибольшее и наименьшее значения на функции на данном отрезке равны соответственно 3 и -1 — наибольшему и наименьшему значениям функции на всей области определения. Решение задачи с применением алгоритма в данном случае окажется существенно более долгим и сложным.

Найдем теперь наибольшее значение непрерывной на всей числовой прямой функции

$$y=3|x+4|-11|x-5|+|2x-17|-5x-9.$$

Здесь нужно обратить внимание на то, что при $x>5$ второй модуль «раскрывается» со знаком «плюс» и при любом «раскрытии» остальных модулей коэффициент при x будет отрицательным, так как $\pm3-11\pm2-5<0$. Аналогично при $x<5$ второй модуль «раскрывается» со знаком «минус» и при любом «раскрытии» остальных модулей коэффициент при x будет положительным, так как $\pm3+11\pm2-5>0$. Значит, график функции состоит из частей (отрезков или лучей) прямых $y=k_ix+b_i$, где $k_i>0$ при $x<5$ и $k_i<0$ при $x>5$. Поэтому на промежутке $(-\infty;\,5]$ данная функция возрастает, а на промежутке $[5;\,+\infty)$ убывает и своего наибольшего значения она достигает в точке $x=5$. Это значение равно $y(5)=3|5+4|-11|5-5|+|2\cdot5-17|-5\cdot5-9=0$. Ключом к решению этой задачи послужило то, что модуль коэффициента при переменной у одного из слагаемых оказался больше любой комбинации сумм и разностей остальных таких коэффициентов. Это позволило сделать вывод о промежутках возрастания и убывания функции. В том случае, если знак такого коэффициента определяется однозначно, решение может оказаться еще проще.

Прежде чем переходить к систематическому изложению методов вычисления наибольших и наименьших значений функции без применения производной, рассмотрим еще один пример: найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2|x-2| + 3|x-3| + 4|x-4| + 5|x-5| + 15x + 16$ на отрезке $[0; 6]$. Заметим, что при любом «раскрытии» модулей коэффициент при переменной будет положительным, так как $\pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 + 15 > 0$. Значит, график функции состоит из частей (отрезков или лучей) прямых $y = k_i x + b_i$, где $k_i > 0$. Следовательно, данная функция возрастает на всей числовой прямой и, в частности, на отрезке $[0; 6]$. Поэтому

$$\min_{[0;6]} y(x) = y(0) = 70, \quad \max_{[0;6]} y(x) = y(6) = 136.$$

Применение свойств функций. Решение задач 1—6 диагностической работы

Монотонность и ограниченность

При вычислении наибольших и наименьших значений функций во многих случаях можно обойтись без применения производной, используя свойства монотонных и ограниченных функций.

Пример 1 (задача 1 диагностической работы). Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-2}.$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$. Данная функция является возрастающей на $D(y)$ как сумма двух возрастающих функций. Поэтому

$$y(x) \geqslant y\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Ответ: $\min y(x) = y\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Пример 2 (задача 2 диагностической работы). Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_2(1-x-x^2).$$

Решение. Имеем $1-x-x^2 = \frac{5}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{5}{4}$. Функция $\log_2 t$ является возрастающей на своей области определения, поэтому $\log_2(1-x-x^2) \leqslant \log_2 \frac{5}{4}$ на $D(y)$, причем знак равенства достигается при $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\max y(x) = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{5}{4}$.

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}.$$

Решение. Имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\cos x \leqslant \frac{\pi}{2}$, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ является возрастающей, поэтому

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) \leqslant \sin\frac{\pi}{2},$$

т. е. $-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) \leqslant 1$. Функция $\left(\frac{1}{2}\right)^z$ является убывающей на $\mathbb{R}$, следовательно,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.$$

При этом $y(x)=\frac{1}{2}$, если $\cos x=1 \iff x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $y(x)=2$, если $\cos x=-1 \iff$ $\iff x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\max y(x)=2$ достигается при $x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\min y(x)=\frac{1}{2}$ достигается при $x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Пример 4. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\sqrt{5-2x}-\sqrt{1-2x}.$$

Решение. Имеем

$$y(x)=\left(\sqrt{5-2x}-\sqrt{1-2x}\right)\cdot\frac{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}}=\frac{(5-2x)-(1-2x)}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}}=\frac{4}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}}.$$

Имеем $D(y)=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$, и функция $f(x)=\sqrt{5-2x}+\sqrt{1-2x}$ является убывающей на $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$ (как сумма двух убывающих функций), следовательно, $f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ при $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. Поэтому функция $y(x)=\frac{1}{f(x)}$ является возрастающей на $D(y)$ и $y(x)\leqslant\frac{4}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=2$ при $x\in D(y)$.

Ответ: $\max y(x)=y\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

Пример 5. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=\sin^3 x+\cos^3 y+\cos^7 x+\sin^7 y.$$

Решение. Имеем $\sin^3 x\leqslant\sin^2 x$, $\cos^3 y\leqslant\cos^2 y$, $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$, $\sin^7 y\leqslant\sin^2 y$, поэтому $z\leqslant\sin^2 x+\cos^2 y+\cos^2 x+\sin^2 y=2$, причем знак равенства достигается, лишь если

$$\begin{cases}\sin^3 x=\sin^2 x,\\ \cos^7 x=\cos^2 x,\\ \sin^7 y=\sin^2 x,\\ \cos^3 y=\cos^2 x\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=1,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=1,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin y=0,\\ \sin y=1,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos y=0,\\ \cos y=1\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0,\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin y=0,\\ \cos y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin y=1,\\ \cos y=0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{ll}x=2\pi n, & n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbb{Z},\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{ll}y=2\pi l, & l\in\mathbb{Z},\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, & m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\end{cases}$$

(Всего 4 серии пар решений.)

Ответ: $\max z(x,y)=2$.

Замена переменной

Иногда наибольшее и наименьшее значения функции можно вычислить, используя подходящую замену переменной. Найдем, например, наибольшее и наименьшее значения функции $y=\cos 2x+\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$. Воспользовавшись формулой двойного аргумента, получим, что $y=-2\sin^2 x+\sin x+1$. Пусть $\sin x=t$. По условию $x\in[0;\pi]$, поэтому $t\in[0;1]$. Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y=-2t^2+t+1$ на отрезке $[0;1]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0=\frac{1}{4}$ принадлежит отрезку $[0;1]$. Поэтому наибольшее значение достигается в точке t_0, а наименьшее — в том из концов отрезка $[0;1]$, который наиболее удален от точки t_0, т. е.

$$\max_{[0;1]} y(t)=y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8},\quad \min_{[0;1]} y(t)=y(1)=0.$$

Соответствующие значения x находятся из уравнений $\sin x=\frac{1}{4}$ и $\sin x=1$ при условии $x\in[0;\pi]$.

Аналогично нахождение множества значений функции $y=5\cos^2 x-3\cos x+1$ сводится к нахождению множества значений функции $f(t)=5t^2-3t+1$ на отрезке $[-1;1]$. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(t)$ достигаются в точках $t=-1$ и $t=0{,}3$ соответственно и равны $f(-1)=9$ и $f(0{,}3)=0{,}55$. Таким образом, множеством значений функции $y=5\cos^2 x-3\cos x+1$ является отрезок $[0{,}55;9]$.

Вообще, с помощью подходящей замены переменной решение многих задач на вычисление наибольших и наименьших значений функции может быть сведено к исследованию квадратного трехчлена на некотором промежутке.

Пример 6 (задача 3 диагностической работы). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=9^x-2\cdot 3^x$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение. Пусть $t=3^x$. По условию $-1\leqslant x\leqslant 2$, поэтому $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant 9$, $y=t^2-2t$. Таким образом, решение задачи сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=t^2-2t$ на отрезке $\left[\frac{1}{3};9\right]$. Ветви параболы, являющейся графиком этой функции, направлены вверх, а абсцисса вершины $t_0=1$ принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{3};9\right]$, поэтому $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};9\right]} y(t)=y(1)=-1$, а максимальное значение достигается на том конце отрезка, который наиболее удален от t_0, т. е. $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};9\right]} f(t)=f(9)=63$. Если $t=1$, то $x=0$; если $t=9$, то $x=2$. Поэтому $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=y(2)=63$, $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=y(0)=-1$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=y(2)=63$, $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=y(0)=-1$.

Пример 7 (задача 4 диагностической работы). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2\sin x - \cos 2x + \cos^2 x.$$

Решение. Используя формулы $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем, что $y = \sin^2 x + 2\sin x$. Пусть $t = \sin x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда решение задачи сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $y = t^2 + 2t$ на отрезке $[-1; 1]$. Пусть t_0 — абсцисса вершины параболы являющейся графиком функции $f(t) = t^2 + 2t$, $t_0 = -1$, ветви параболы направлены вверх, и, следовательно, на $[-1; 1]$ функция $f(t) = t^2 + 2t$ возрастает. Поэтому

$$\min_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = -1, \quad \max_{[-1;1]} f(t) = f(1) = 3.$$

Если $t = -1$, то $\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $t = 1$, то $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 3$ достигается при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -1$ достигается при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 6\sqrt{2x-3} - 2x$ на отрезке $[2; 8]$.

Решение. Пусть $t = \sqrt{2x-3}$. По условию $2 \leqslant x \leqslant 8$, поэтому $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{13}$. При этом $2x = t^2 + 3$, т. е.

$$y = 6t - t^2 - 3 = -t^2 + 6t - 3.$$

Таким образом, задача сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t) = -t^2 + 6t - 3$ на отрезке $\left[1; \sqrt{13}\right]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, абсцисса t_0 вершины параболы равна 3. Так как $t_0 \in \left[1; \sqrt{13}\right]$, получаем, что

$$\max_{[1;\sqrt{13}]} f(t) = f(3) = 6,$$

а наименьшее значение достигается в том из концов отрезка $\left[1; \sqrt{13}\right]$, который наиболее удален от t_0, т. е.

$$\min_{[1;\sqrt{13}]} f(t) = f(1) = 2.$$

Если $t = 3$, то $x = \frac{t^2+3}{2} = 6$; если $t = 1$, то $x = 2$.

Ответ: $\min\limits_{[2;8]} y(x) = y(2) = 2$, $\max\limits_{[2;8]} y(x) = y(6) = 6$.

Пример 9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \cos x + 4\sqrt{2 - \cos x} - 6.$$

Решение. Пусть $t=\sqrt{2-\cos x}$. Тогда

$$1 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}, \quad \cos x = 2-t^2,$$
$$y = 2-t^2+4t-6 = -t^2+4t-4 = -(t-2)^2.$$

Решение задачи свелось к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=-(t-2)^2$ на отрезке $\left[1;\sqrt{3}\right]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса t_0 вершины параболы равна 2, т. е. $t_0>\sqrt{3}$. Поэтому на $\left[1;\sqrt{3}\right]$ функция $f(t)=-(t-2)^2$ является возрастающей. Следовательно,

$$\min_{[1;\sqrt{3}]} f(t) = y(1) = -1, \quad \max_{[1;\sqrt{3}]} f(t) = y\left(\sqrt{3}\right) = -\left(\sqrt{3}-2\right)^2 = 4\sqrt{3}-7.$$

Если $t=1$, то $\cos x=1 \iff x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Если $t=\sqrt{3}$, то $\cos x=-1 \iff x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-1$ достигается при $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=4\sqrt{3}-7$ достигается при $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Пример 10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 4x+6|x-2|-x^2 \quad \text{на отрезке } [-1;3].$$

Решение. Имеем

$$y = -(x^2-4x+4-4)+6|x-2| = -(x-2)^2+6|x-2|+4.$$

Так как $a^2=|a|^2$, можем записать $y=-|x-2|^2+6|x-2|+4$. Пусть $t=|x-2|$. По условию $-1\leqslant x\leqslant 3$, поэтому $0\leqslant t\leqslant 3$. При этом $y=-t^2+6t+4$, и задача сводится к вычислению наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции $f(t)=-t^2+6t+4$ на отрезке $[0;3]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, абсцисса t_0 вершины равна 3. Поэтому на отрезке $[0;3]$ функция $f(t)=-t^2+6t+4$ возрастает, и, следовательно,

$$\min_{[0;3]} f(t) = f(0) = 4, \quad \max_{[0;3]} f(t) = f(3) = 13.$$

Если $t=0$, то $x=2$. Если $t=3$, то $|x-2|=3 \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=5. \end{array}\right.$ Но по условию $x\in[-1;3]$, поэтому остается только значение $x=-1$.

Ответ: $\min\limits_{[-1;3]} y(x)=y(2)=4$, $\max\limits_{[-1;3]} y(x)=y(-1)=13$.

Следует отметить, что замена переменной может существенно упростить решение задачи и в тех случаях, когда без применения производной обойтись уже невозможно. Так, вычисление наибольшего и наименьшего значений функции $y=\cos x\sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью замены переменной $t=\sin x$ можно свести к вычислению наибольшего и наименьшего значений функции $z=2t-2t^3$ на отрезке $[-1;\ 1]$. И в том и в другом случае нужно использовать стандартный алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений функции, заданной на отрезке, но для функции $z=2t-2t^3$ вычисления будут существенно проще.

Исследование множества значений функции

В некоторых случаях найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y=f(x)$ удается, исследовав при помощи элементарных приемов множество значений функции. В таких случаях зависимость $y=f(x)$ рассматривают как уравнение относительно переменной x с параметром y и находят наибольшее (наименьшее) значение y, при котором это уравнение имеет решения.

Пример 11 (задача 5 диагностической работы)**.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{4x-1}{x^2-2x+2}. \tag{1}$$

Решение. Область определения функции: $D(y)=\mathbb{R}$. Рассмотрим соотношение (1) как уравнение относительно переменной x с параметром y, переписав его в виде

$$yx^2-2(y+2)x+2y+1=0. \tag{2}$$

Если $y=0$, то уравнение (2) становится линейным. При этом $x=\frac{1}{4}$. Пусть теперь $y\neq 0$. Уравнение (2) имеет решения в том и только в том случае, если его дискриминант D неотрицателен. Найдем $\frac{D}{4}=(y+2)^2-y(2y+1)=-y^2+3y+4\geqslant 0$, т. е. $y^2-3y-4\leqslant 0 \iff -1\leqslant y\leqslant 4$. Таким образом, $\min y=-1$, $\max y=4$. При этом $D=0$ и $x=\frac{y+2}{y}$. Если $y=-1$, то $x=-1$; если $y=4$, то $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\min y(x)=y(-1)=-1$; $\max y(x)=y\left(\frac{3}{2}\right)=4$.

Пример 12 (задача 6 диагностической работы)**.** Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}. \tag{3}$$

Решение. Область определения функции: $D(y)=\mathbb{R}$. Рассмотрим соотношение (3) как уравнение с переменной x и параметром y, переписав его в виде

$$(2y-1)x^2+yx+y-1=0. \tag{4}$$

При $y=\frac{1}{2}$ уравнение (4) становится линейным. В этом случае $x=1$. Пусть $y\neq\frac{1}{2}$. Уравнение (4) имеет решения в том и только том случае, если $0\leqslant D$, где D — дискриминант этого уравнения, равный $y^2-4(2y-1)(y-1)=-7y^2+12y-4$. Имеем $D\geqslant 0$, если

$$7y^2-12y+4\leqslant 0 \iff \frac{6-2\sqrt{2}}{7}\leqslant y\leqslant \frac{6+2\sqrt{2}}{7}.$$

Очевидно, что $\frac{6+2\sqrt{2}}{7}>\frac{1}{2}$. Поэтому $\max y=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$. При этом $D=0$ и $x=-\frac{y}{2(2y-1)}$, т. е.

$$x=-\frac{3+\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}}=-\frac{(3+\sqrt{2})(5-4\sqrt{2})}{(5+4\sqrt{2})(5-4\sqrt{2})}=1-\sqrt{2}.$$

Ответ: $\max y(x)=y(1-\sqrt{2})=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$.

Отметим, что использовать данный метод целесообразно в том случае, если полученное уравнение с параметром y имеет достаточно простой вид (например, является квадратным относительно x).

Пример 13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=5^{\frac{4x-9}{x^2-6x+10}}.$$

Решение. Пусть $t=\frac{4x-9}{x^2-6x+10}$. Найдем множество значений функции t. Для этого рассмотрим уравнение

$$tx^2-2(3t+2)x+10t+9=0. \tag{5}$$

При $t=0$ уравнение (5) становится линейным. При этом $x=\frac{9}{4}$. Пусть $t\neq 0$. Тогда уравнение (5) имеет решения в том и только том случае, если $\frac{D}{4}\geqslant 0$, где D — дискриминант этого уравнения. Найдем $\frac{D}{4}=(3t+2)^2-t(10t+9)=-t^2+3t+4$. Поэтому $\frac{D}{4}\geqslant 0 \iff t^2-3t-4\leqslant 0 \iff -1\leqslant t\leqslant 4$. Таким образом, $\max t(x)=4$, $\min t(x)=-1$. При этом $\frac{D}{4}=0$ и $x=\frac{3t+2}{t}$. Если $t=4$, то $x=\frac{7}{2}$; если $t=-1$, то $x=1$. Далее, функция 5^t возрастающая, поэтому $5^{-1}\leqslant 5^t\leqslant 5^4$, т. е.

$$\min_{\mathbb{R}} y(x)=y(1)=\frac{1}{5}, \quad \max_{\mathbb{R}} y(x)=y\left(\frac{7}{2}\right)=625.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y(1)=\frac{1}{5}$, $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y\left(\frac{7}{2}\right)=625$.

Ответы:

Т1.1

Т1.2

Т1.3

Т1.4

Т1.5

Т1.6

Т1.7

Т1.8

Т1.9

Т1.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 1

Т1.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt[3]{x}} + 4$$

на отрезке $[1; 64]$.

Т1.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{4x+1}{2x^2+3}.$$

Т1.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2+6x+25}.$$

Т1.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3\sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1.$$

Т1.5. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3^{3+4x-4x^2}.$$

Т1.6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \log_5(9x^2 - 12x + 29).$$

Т1.7. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x+8} - \sqrt{x-8}.$$

Т1.8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = -\frac{4x^2+4x+7}{4x^2+4x+3}.$$

Т1.9. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \cos^2 x - \sin x + 1.$$

Т1.10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \log_{\sqrt{3}}(x - 4\sqrt{x-2} + 5)$$

на отрезке $[5; 10]$.

Тренировочная работа 2

Т2.1. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \sqrt{8x - x^2 - 7}.$$

Т2.2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = -\frac{2x^2 - 16x + 14}{2x^2 - 4x + 5}.$$

Т2.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1.$$

Т2.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \frac{1}{\sqrt{4x-3} - \sqrt{4x-7}}.$$

Т2.5. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \sqrt{2x^2 - 1} - 4x^2.$$

Т2.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 8x^3 - x^6 \quad \text{на отрезке } [1; 7].$$

Т2.7. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \sqrt{2\lg x - 1} - \lg x.$$

Т2.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 7|x-3| - 2|x+5| - |4x-3| + 5$$
на отрезке $[1; 6]$.

Т2.9. Найдите наибольшее значение функции
$$y = |5x-4| + |4x-5| - 10x - 11$$
на отрезке $[-2; 5]$.

Т2.10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \log_{0,25}(x^2 + 2x + 5) + \log_4(x^2 - 2x + 7).$$

Ответы:

Т2.1

Т2.2

Т2.3

Т2.4

Т2.5

Т2.6

Т2.7

Т2.8

Т2.9

Т2.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Применение стандартных неравенств. Решение задач 7—12 диагностической работы

Неравенство Коши для двух чисел

Напомним, что для любых двух неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство, называемое неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел (неравенство Коши):

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \tag{6}$$

(среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического). Это неравенство легко получить из очевидного неравенства $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$, выполнив возведение в квадрат и перенеся квадратный корень в правую часть. Знак равенства в формуле (6) достигается в том и только том случае, когда $a=b$.

Важным следствием неравенства Коши является следующее: для любых положительных чисел a и b и любого отличного от нуля действительного числа t выполняется неравенство

$$\left|at+\frac{b}{t}\right| \geqslant 2\sqrt{ab}, \tag{7}$$

причем знак равенства достигается в том и только том случае, когда $at=\frac{b}{t}$, т. е. $t^2=\frac{b}{a}$.

Докажем неравенство (7). Пусть $t>0$. Тогда в силу неравенства (6) имеем

$$at+\frac{b}{t} \geqslant 2\sqrt{at\cdot\frac{b}{t}},$$

т. е.

$$at+\frac{b}{t} \geqslant 2\sqrt{ab} \quad \text{при } t>0. \tag{8}$$

Знак равенства достигается, если $t=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Пусть $t<0$. Тогда $-t>0$ и в силу неравенства (8) имеем

$$a(-t)+\frac{b}{(-t)} \geqslant 2\sqrt{ab} \iff at+\frac{b}{t} \leqslant -2\sqrt{ab} \quad \text{при } t<0. \tag{9}$$

Знак равенства достигается, если $t=-\sqrt{\frac{b}{a}}$. Неравенства (8) и (9) можно объединить в одно неравенство (7).

Пример 14 (задача 7 диагностической работы)**.** Найдите наименьшее значение функции

$$y=3^{2x-1}+4\cdot 3^{3-2x}.$$

Решение. Так как числа 3^t и $4\cdot 3^z$ положительные при любых действительных значениях t и z, применив неравенство (6), получим

$$y = 3^{2x-1} + 4\cdot 3^{3-2x} \geqslant 2\sqrt{3^{2x-1}\cdot 4\cdot 3^{3-2x}} = 2\sqrt{3^2\cdot 4} = 12.$$

Таким образом, $y(x) \geqslant 12$ при любом действительном x, причем знак равенства достигается, лишь если

$$3^{2x-1} = 4\cdot 3^{3-2x} \iff 3^{4x-4} = 4 \iff x = \frac{4+\log_3 4}{4} = \frac{2+\log_3 2}{2}.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y\left(\frac{2+\log_3 2}{2}\right) = 12.$

Пример 15. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\cdot\frac{x^2-x+1}{2x-1} \quad \text{на интервале } \left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$$

Решение. Имеем

$$y = 4\cdot\frac{x^2-x+1}{2x-1} = \frac{4x^2-4x+4}{2x-1} = \frac{(2x-1)^2+3}{2x-1} = 2x-1+\frac{3}{2x-1}.$$

По условию $x<\frac{1}{2}$, поэтому $2x-1<0$ и $\frac{3}{2x-1}<0$. Воспользуемся неравенством (7) для случая $t<0$. Тогда

$$y = 2x-1+\frac{3}{2x-1} \leqslant -2\sqrt{3},$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2x-1 = \dfrac{3}{2x-1}, \\ 2x-1 < 0. \end{cases}$$

Из последней системы находим $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\max\limits_{\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)} y(x) = y\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}.$

Пример 16. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{4\sin^2 x}{2\sin x-1} \quad \text{на интервале } \left(\frac{13}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi\right).$$

Решение. Имеем

$$y = \frac{4\sin^2 x-1+1}{2\sin x-1} = \frac{(2\sin x-1)(2\sin x+1)+1}{2\sin x-1} =$$
$$= 2\sin x+1+\frac{1}{2\sin x-1} = 2\sin x-1+\frac{1}{2\sin x-1}+2.$$

По условию $\frac{13}{6}\pi < x < \frac{17}{6}\pi$, т. е. $\frac{\pi}{6} + 2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi$, а значит, $\sin x > \frac{1}{2}$. Воспользуемся неравенством (7) для случая $t > 0$:

$$y = 2\sin x - 1 + \frac{1}{2\sin x - 1} + 2 \geqslant 2\sqrt{(2\sin x - 1)\cdot\frac{1}{2\sin x - 1}} + 2 = 4.$$

Таким образом, $y \geqslant 4$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (2\sin x - 1)^2 = 1, \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1.$$

С учетом того, что $\frac{13}{6}\pi < x < \frac{17}{6}\pi$, получим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5}{2}\pi$.

Ответ: $\min\limits_{\left(\frac{13}{6}\pi;\frac{17}{6}\pi\right)} y = y\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 4$.

Пример 17. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x^3(2 - x^3)}.$$

Решение. Заметим, что $D(y) = \left[0;\ \sqrt[3]{2}\right]$. При $x \in \left[0;\ \sqrt[3]{2}\right]$ выполнены, очевидно, неравенства $x^3 \geqslant 0$, $2 - x^3 \geqslant 0$. Применим неравенство (6):

$$y = \sqrt{x^3(2 - x^3)} \leqslant \frac{x^3 + 2 - x^3}{2} = 1.$$

Поэтому $y \leqslant 1$, причем знак равенства достигается, лишь если

$$\begin{cases} x^3 = 2 - x^3, \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\max y(x) = y(1) = 1$.

Пример 18. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_3 x \log_3 \frac{9}{x} + 1 \quad \text{на } [1; 9].$$

Решение. При $x \in [1; 9]$ справедливы неравенства

$$\log_3 x \geqslant 0, \quad \log_3 \frac{9}{x} \geqslant 0.$$

Воспользуемся неравенством (6), возводя обе его части в квадрат. Тогда

$$y = \log_3 x \log_3 \frac{9}{x} + 1 \leqslant \left(\frac{\log_3 x + \log_3 \frac{9}{x}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\log_3 9}{2}\right)^2 + 1 = 2.$$

Итак, $y \leqslant 2$, причем знак равенства достигается, лишь если

$$\begin{cases} \log_3 x = \log_3 \dfrac{9}{x}, \\ 1 \leqslant x \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \; x = 3.$$

Ответ: $\max\limits_{[1;9]} y(x) = y(3) = 2.$

Заметим, что неравенство $ab \leqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ справедливо для любых действительных чисел a и b.

Неравенство $|a|+|b| \geqslant |a+b|$

Напомним, что для любых двух действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a|+|b| \geqslant |a+b|, \tag{10}$$

причем знак равенства достигается в том и только том случае, когда $ab \geqslant 0$.

Доказать неравенство (10) можно различными способами. Приведем один из них. Из очевидного неравенства $|a||b| \geqslant ab$ (знак равенства достигается только в том случае, когда числа a и b имеют одинаковые знаки, т. е. когда $ab \geqslant 0$) следует, что

$$2|a||b| \geqslant 2ab \Rightarrow a^2+b^2+2|a||b| \geqslant a^2+b^2+2ab \;\Rightarrow\; |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \geqslant a^2+2ab+b^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (|a|+|b|)^2 \geqslant (a+b)^2 \Rightarrow |a|+|b| \geqslant |a+b|,$$

что и требовалось.

Рассмотрим несколько примеров на применение неравенства (10).

Пример 19 (задача 8 диагностической работы)**.** Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x^2-x|+|x+1|.$$

Решение. В силу неравенства (10) имеем

$$y = |x^2-x|+|x+1| \geqslant |x^2-x+x+1| = |x^2+1| = x^2+1 \geqslant 1.$$

Таким образом, $y \geqslant 1$, причем знак равенства достигается только в том случае, когда одновременно выполнены равенства

$$|x^2-x|+|x+1| = |x^2+1| \quad \text{и} \quad x^2+1 = 1, \quad \text{т. е. } x = 0.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(0) = 1.$

Пример 20. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x-1|+|x-2|+|x-3|.$$

Решение. Имеем

$$y = |x-1|+|x-2|+|x-3| = |-x+1|+|x-3|+|x-2| \geqslant$$
$$\geqslant |-x+1+x-3|+|x-2| = 2+|x-2| \geqslant 2,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |-x+1|+|x-3| = 2, \\ 2+|x-2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(x-3) \geqslant 0, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(2) = 2$.

Пример 21. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |\log_2 x| + \left|\log_2 \frac{4}{x}\right| + \log_2^2(x-1).$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = (1; \infty)$. При $x > 1$ имеем

$$y = |\log_2 x| + \left|\log_2 \frac{4}{x}\right| + \log_2^2(x-1) \geqslant \left|\log_2 x + \log_2 \frac{4}{x}\right| + \log_2^2(x-1) = 2 + \log_2^2(x-1) \geqslant 2,$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |\log_2 x| + \left|\log_2 \frac{4}{x}\right| = \left|\log_2 x + \log_2 \frac{4}{x}\right|, \\ \log_2^2(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 \frac{4}{x} \geqslant 0, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\min\limits_{(1;\infty)} y(x) = y(2) = 2$.

Неравенство $|a\sin t + b\cos t| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$

Неравенство

$$|a\sin t + b\cos t| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \qquad (11)$$

может быть доказано разными способами, наиболее распространенным из которых является введение вспомогательного угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

При этом

$$|a\sin t+b\cos t| = \sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right| =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin t\cos\varphi+\cos t\sin\varphi| = \sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(t+\varphi)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

Знак равенства достигается, лишь если

$$|\sin(t+\varphi)| = 1 \iff t+\varphi = \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \iff t = \frac{\pi}{2}-\varphi+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, функция $y(t) = a\sin t + b\cos t$ достигает наибольшего значения, равного $\sqrt{a^2+b^2}$, при

$$t = \frac{\pi}{2}-\varphi+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z},$$

и наименьшего значения, равного $-\sqrt{a^2+b^2}$, при $t = -\frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, где $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 22 (задача 9 диагностической работы)**.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin 3x+\cos 3x-2$.

Решение. Применим неравенство (11) к данной функции:

$$-\sqrt{2}-2 \leqslant \sin 3x+\cos 3x-2 \leqslant \sqrt{2}-2.$$

Таким образом, $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \sqrt{2}-2$. При этом

$$3x = \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z},$$

т. е.

$$x = \frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Соответственно $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -\sqrt{2}-2$. При этом

$$3x = -\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z},$$

т. е. $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = \sqrt{2}-2$ достигается при $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = -\sqrt{2}-2$ достигается при $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 23. Найдите наибольшее значение функции $y=\sin x(\sin x+\cos x)+\sqrt{2}\cos x$.

Решение. Из неравенства (11) следует, что $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$. Но тогда

$$y = \sin x(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\cos x \leqslant \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2.$$

Таким образом, $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 2$. При этом

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x) = 2$ достигается при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 24. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sin 2x\sqrt{\cos 2x} + \cos 2x\sqrt{\sin 2x}.$$

Решение. Для любого $x \in D(y)$ получим в соответствии с неравенством (11), что

$$y = \sin 2x\sqrt{\cos 2x} + \cos 2x\sqrt{\sin 2x} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(\sqrt{\cos 2x})^2 + (\sqrt{\sin 2x})^2} = \sqrt{\cos 2x + \sin 2x} \leqslant \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}.$$

Таким образом, $\max y(x) = \sqrt[4]{2}$. При этом

$$2x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е. $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что эти значения x, очевидно, принадлежат области определения функции.

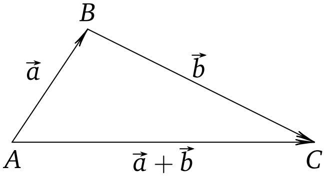
Ответ: $\max y(x) = \sqrt[4]{2}$ достигается при $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неравенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b}|$

Неравенство

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b}| \tag{12}$$

по существу представляет собой не что иное, как неравенство треугольника (см. рисунок):



$$AB = |\vec{a}|, \quad BC = |\vec{b}|, \quad AC = |\vec{a} + \vec{b}|, \quad AC \leqslant AB + BC.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т. е. когда отношения их соответствующих координат равны между собой и равны отношению их длин (модулей).

Пример 25 (задача 10 диагностической работы). Найдите наименьшее значение функции
$$y = \sqrt{(x-3)^2+1} + \sqrt{(x-2)^2+4}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a} = \{3-x; 1\}$ и $\vec{b} = \{x-2; 2\}$. Тогда
$$|\vec{a}| = \sqrt{(x-3)^2+1}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(x-2)^2+4},$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \{1; 3\}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.$$
Используя неравенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b}|$, получаем, что $y(x) \geqslant \sqrt{10}$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е. когда
$$\frac{3-x}{x-2} = \frac{1}{2} \iff 6-2x = x-2 \iff x = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{10}.$

Пример 26. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \sqrt{(x-1)^2+(x-6)^2} + \sqrt{(x-4)^2+(x-2)^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a} = \{x-1; 6-x\}$ и $\vec{b} = \{4-x; x-2\}$. Тогда
$$\vec{a} + \vec{b} = \{3; 4\}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$
и в соответствии с неравенством (12) имеем $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant 5$. Поэтому $y \geqslant 5$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е. когда
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4-x} = \dfrac{6-x}{x-2}, \\ \dfrac{x-1}{4-x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-3x+2 = x^2-10x+24, \\ \dfrac{x-1}{4-x} > 0 \end{cases} \iff x = \frac{22}{7}.$$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y\left(\frac{22}{7}\right) = 5.$

Пример 27. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \sqrt{4^x+1} + \sqrt{(2^x-12)^2+4}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a} = \{2^x; 1\}$ и $\vec{b} = \{12-2^x; 2\}$. Тогда $(\vec{a} + \vec{b}) = \{12; 3\}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{153}$ и в соответствии с неравенством (12) имеем $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant \sqrt{153}$. Поэтому $y(x) \geqslant \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т. е. когда $\dfrac{12-2^x}{2^x} = \dfrac{2}{1} \iff 12-2^x = 2\cdot 2^x \iff 2^x = 4 \iff x = 2.$

Ответ: $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x) = y(2) = 3\sqrt{17}.$

Заметим, что, вводя векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следует выбирать их координаты таким образом, чтобы координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ не зависели от переменной x. Кроме того, если квадраты каких-то одноименных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются числами (как в примерах 25 и 27), то знаки этих чисел должны выбираться одинаковыми, для того чтобы было выполнено условие сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если же любая из координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зависит от x (как в примере 26), то следует наложить ограничение на отношение двух одноименных координат: это отношение должно быть положительным.

Неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Неравенство

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \qquad (13)$$

легко следует из определения скалярного произведения векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=1$, т. е. угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0 и, следовательно, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Неравенство (13), как правило, применяется для вычисления наибольшего значения функции и используется при этом в координатной форме.

Пример 28 (задача 11 диагностической работы). Найдите наибольшее значение функции $y=2x+\sqrt{1-4x^2}$.

Решение. Область определения функции: $D(y)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Введем векторы

$$\vec{a}=\left\{2x;\sqrt{1-4x^2}\right\} \quad \text{и} \quad \vec{b}=\{1;1\}.$$

Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{4x^2+1-4x^2}=1, \quad |\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}, \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2x+\sqrt{1-4x^2}.$$

В силу неравенства (13) имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant1\cdot\sqrt{2}$, поэтому $y(x)\leqslant\sqrt{2}$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. когда

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{1}=\dfrac{2x}{1},\\ \dfrac{2x}{1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4x^2=4x^2,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $\frac{1}{2\sqrt{2}}\in D(y)$.

Ответ: $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$.

Пример 29. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x\left(\sqrt{1-9x^2}+3\sqrt{4-x^2}\right).$$

Решение. Имеем

$$y = x\sqrt{1-9x^2}+3x\sqrt{4-x^2}, \quad D(y) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right].$$

Введем векторы $\vec{a}=\{x; \sqrt{4-x^2}\}$ и $\vec{b}=\{\sqrt{1-9x^2}; 3x\}$. Тогда

$$y = \vec{a}\cdot\vec{b}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2+4-x^2} = 2, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1-9x^2+9x^2} = 1$$

и в силу неравенства (13) имеем $y(x) \leqslant 2\cdot 1 = 2$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е. когда

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-9x^2}}{x} = \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-9x^2)(4-x^2) = 9x^4, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4}{37}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{37}}.$$

Заметим, что $\dfrac{2}{\sqrt{37}} < \dfrac{2}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{3}$, поэтому $\dfrac{2}{\sqrt{37}} \in D(y)$.

Ответ: $\max\limits_{\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]} y(x) = y\left(\dfrac{2}{\sqrt{37}}\right) = 2.$

Пример 30. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{|2x-1|\sqrt{2x-1}+|x-1|\sqrt{4x-1}}{x^2}.$$

Решение. Область определения функции: $D(y) = \left[\dfrac{1}{2}; \infty\right)$. Введем векторы

$$\vec{a} = \{|2x-1|; \sqrt{4x-1}\} \quad \text{и} \quad \vec{b} = \{\sqrt{2x-1}; |x-1|\}.$$

Тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{|2x-1|^2+(\sqrt{4x-1})^2} = \sqrt{4x^2} = 2x,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{2x-1})^2+|x-1|^2} = \sqrt{x^2} = x \quad \left(\text{так как } x \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

В силу неравенства (13) имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2x^2$, поэтому $y(x)\leqslant\dfrac{2x^2}{x^2}=2$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т. е.

$$\begin{cases}\dfrac{|2x-1|}{\sqrt{2x-1}}=2,\\ \dfrac{\sqrt{4x-1}}{|x-1|}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(2x-1)^2}{2x-1}=4,\\ \dfrac{4x-1}{(x-1)^2}=4\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Заметим, что при $x=\dfrac{1}{2}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также являются сонаправленными.

Ответ: $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\infty\right)} y(x)=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=y\left(\dfrac{5}{2}\right)=2.$

При использовании неравенства (13) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует вводить таким образом, чтобы либо $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ не зависели от переменной x (пример 28), либо отношение модулей этих векторов было величиной постоянной. Кроме того, следует отметить, что если в условии (или в условиях) сонаправленности приходится выполнять деления на выражение, содержащее неизвестную, то нужно проверить, не являются ли векторы сонаправленными и в том случае, когда это выражение обращается в нуль. Если этого не сделать, то можно потерять решение (см. пример 30).

Аналогично неравенству (13) можно доказать неравенство

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\geqslant-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

В самом деле,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a};\,\vec{b}})\geqslant-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

поскольку $\cos(\widehat{\vec{a};\,\vec{b}})\geqslant-1$. Знак равенства достигается только в том случае, когда $\cos(\widehat{\vec{a};\,\vec{b}})=-1$, т. е. когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены. Полученное неравенство можно использовать для нахождения наименьших значений некоторых функций.

Таким образом,

$$-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,\quad\text{или}\quad|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Используя последнее неравенство, докажем в качестве примера неравенство (11). Введем векторы $\vec{m}=\{\sin x;\cos x\}$ и $\vec{n}=\{a;b\}$. Вычисление длин этих векторов не представляет труда: $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2}$. Так как $-|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\leqslant\vec{m}\cdot\vec{n}\leqslant|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$, получаем

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\sin x+b\cos x\leqslant\sqrt{a^2+b^2},\quad\text{или}\quad|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

Для неравенства $a\sin x+b\cos x\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ знак равенства достигается, если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, т. е. отношение их соответствующих координат равно отношению длин этих векторов: $\dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\cos x}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда

$$\sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Для неравенства $a\sin x+b\cos x\geqslant-\sqrt{a^2+b^2}$ знак равенства достигается, если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены, т. е. отношение их соответствующих координат равно отношению длин этих векторов, взятому со знаком «минус»:

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\cos x}{b}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откуда

$$\sin x=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos x=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Заметим, что такое доказательство неравенства (11) позволяет избежать введения дополнительного угла.

Комбинирование приемов

В заключение рассмотрим ряд задач, решение которых требует применения нескольких из описанных выше приемов. К таким задачам относятся, в частности, задачи на вычисление наибольших и наименьших значений выражений (функций), зависящих более чем от одной переменной.

Пример 31 (задача 12 диагностической работы)**.** Найдите наименьшее значение функции

$$y=\log_{0,5}\left(\frac{\sqrt{4x^4-3x^2+9}-\sqrt{4x^4-8x^2+9}}{x}\right)\quad \text{на интервале } (0;\infty).$$

Решение. При $x>0$ выражение под знаком логарифма, положительно, что следует из очевидного неравенства

$$\sqrt{4x^4-3x^2+9}>\sqrt{4x^4-8x^2+9},$$

равносильного неравенству $5x^2>0$. Пусть

$$t=\frac{\sqrt{4x^4-3x^2+9}-\sqrt{4x^4-8x^2+9}}{x}=$$

$$=\frac{5x}{\sqrt{4x^4-3x^2+9}+\sqrt{4x^4-8x^2+9}}=\frac{5}{\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-8}}.$$

В силу неравенства (8) имеем

$$4x^2+\frac{9}{x^2}\geqslant 2\sqrt{4x^2\cdot\frac{9}{x^2}}=12,$$

причем знак равенства достигается, лишь если $4x^2=\frac{9}{x^2}$ и $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Таким образом,

$$\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{4x^2+\frac{9}{x^2}-8}\geqslant\sqrt{12-3}+\sqrt{12-8}=5.$$

Отсюда $t\leqslant 1$. Функция $\log_{0,5}t$ является убывающей, поэтому $\log_{0,5}t\geqslant\log_{0,5}1=0$.

Ответ: $\min\limits_{(0;\infty)}y(x)=y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=0$.

Пример 32. Найдите наименьшее значение выражения

$$z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-y)^2+y^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\{x-1;\,y-1\}$ и $\vec{b}=\{y-x;\,-y\}$. Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},\quad |\vec{b}|=\sqrt{(x-y)^2+y^2},$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\{y-1;\,-1\},\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(y-1)^2+1}.$$

В силу неравенства (12) имеем $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}+\vec{b}|$, причем знак равенства достигается, лишь если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Таким образом, $z\geqslant\sqrt{(y-1)^2+1}\geqslant 1$, причем $z=1$, если $y=1$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, следовательно, $x=1$.

Ответ: $\min z(x;\,y)=z(1;\,1)=1$.

Пример 33. Найдите наименьшее значение выражения

$$z=|x+2y|+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\{x+2y;\,0\}$, $\vec{b}=\{3-x;\,y-4\}$. Тогда

$$|\vec{a}|=|x+2y|,\quad |\vec{b}|=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2},$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\{2y+3;\,y-4\},$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2y+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{5y^2+4y+25}.$$

В силу неравенства (12) имеем $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}+\vec{b}|$, причем знак равенства достигается, лишь если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Таким образом, $z\geqslant\sqrt{5y^2+4y+25}$. Квадратный трехчлен $5y^2+4y+25$ положителен при любом y (дискриминант меньше нуля и коэффициент при y^2 положителен) и достигает наименьшего значения при $y=\frac{-4}{2\cdot 5}=-\frac{2}{5}$. Это наименьшее значение равно, как легко подсчитать, $\frac{121}{5}$. Поэтому $z\geqslant\sqrt{\frac{121}{5}}$, причем знак равенства достигается, лишь если $y=-\frac{2}{5}$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, следовательно, $x=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\min z(x;y)=z\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{\sqrt{5}}$.

Пример 34. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{3+2y-2y^2}.$$

Решение. Введем векторы $\vec{a}=\{y;\ \sqrt{3+2y-2y^2}\}$ и $\vec{b}=\{\sqrt{1-x^2};\ x\}$. Тогда

$$z=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{a}|=\sqrt{y^2+3+2y-2y^2}=\sqrt{4-(1-y)^2},\quad |\vec{b}|=\sqrt{1-x^2+x^2}=1.$$

В силу неравенства (13) имеем $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, причем знак равенства достигается, лишь если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Таким образом,

$$z\leqslant\sqrt{4-(y-1)^2}\leqslant\sqrt{4}=2,$$

причем знак равенства достигается, лишь если $y=1$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, следовательно,

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\frac{x}{\sqrt{3}}\iff\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 3-3x^2=x^2\end{cases}\iff x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\max z(x;y)=z\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)=2$.

Пример 35. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=\sin x-2\cos y+\sin(x+y).$$

Решение. Имеем

$$z=\sin x-2\cos y+\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin x(1+\cos y)+\cos x\sin y-2\cos y.$$

В силу неравенства (11) получаем

$$\sin x(1+\cos y)+\cos x\sin y\leqslant\sqrt{(1+\cos y)^2+\sin^2 y},$$

т. е.

$$\sin x(1+\cos y)+\cos x\sin y\leqslant\sqrt{2+2\cos y}. \tag{14}$$

Поэтому $z\leqslant\sqrt{2+2\cos y}-2\cos y$. Пусть теперь $t=\sqrt{2+2\cos y}$, $0\leqslant t\leqslant 2$. Тогда $2\cos y=t^2-2$. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t)=t-t^2+2$ на отрезке $[0;2]$. Ветви параболы, являющейся графиком этого квадратного трехчлена, направлены вниз, и абсцисса t_0 вершины, равная $\frac{1}{2}$, принадлежит отрезку [0; 2], следовательно,

$$\max_{[0;2]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Поэтому $z \leqslant \frac{9}{4}$, причем знак равенства достигается в том и только том случае, если одновременно $\sqrt{2+2\cos y} = \frac{1}{2}$ и неравенство (14) обращается в равенство. Отсюда

$$\begin{cases} \sqrt{2+2\cos y} = \frac{1}{2}, \\ \sin x(1+\cos y) + \cos x \sin y = \sqrt{2+2\cos y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{7}{8}, \\ \frac{1}{8}\sin x + \cos x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \pi - \arccos\frac{7}{8} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{8}\sin x + \frac{\sqrt{15}}{8}\cos x = \frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \arccos\frac{7}{8} - \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{8}\sin x - \frac{\sqrt{15}}{8}\cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \pi - \arccos\frac{7}{8} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{4}\sin x + \frac{\sqrt{15}}{4}\cos x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \arccos\frac{7}{8} - \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{4}\sin x - \frac{\sqrt{15}}{4}\cos x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \pi - \arccos\frac{7}{8} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(x + \arccos\frac{1}{4}\right) = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \arccos\frac{7}{8} - \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(x - \arccos\frac{1}{4}\right) = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \pi - \arccos\frac{7}{8} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \arccos\frac{7}{8} - \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\max z(x; y) = \frac{9}{4}$.

Рассмотренные примеры показывают, что довольно большое число задач на вычисление наибольших и наименьших значений функций можно решить, не прибегая к помощи производной, а в некоторых случаях только такой путь и приводит к успеху. Отметим, что порой подобные задачи являются частью более сложных задач (например, уравнений, в которых минимум левой части совпадает с максимумом правой, причем решение «стандартными» приемами не представляется возможным).

Такого рода уравнения, неравенства или системы уравнений вполне могут встретиться среди заданий 13, 15, 18 единого государственного экзамена по математике, поэтому, решив тренировочные и диагностические работы параграфа, вы сможете более уверенно чувствовать себя на экзамене.

Ответы:

Тренировочная работа 3

Т3.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y=7^{5x-2}+9\cdot 7^{4-5x}-41.$$

Т3.2. Найдите наименьшее значение функции

$$y=|2x-3x^2|+|2x+9|.$$

Т3.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-10x+29}.$$

Т3.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y=3\sqrt{10-3x}+4\sqrt{3x+26}.$$

Т3.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{\log^2_{0,75}x+1}+\sqrt{(\log_{0,75}x-3)^2+9}.$$

Т3.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y=0{,}8\cos x(3\sin x+4\cos x)+3\sin x.$$

Т3.7. Найдите наибольшее значение функции

$$y=x\left(2\sqrt{16-9x^2}+3\sqrt{9-4x^2}\right).$$

Т3.8. Найдите наименьшее значение выражения

$$z=\sqrt{(2x-1)^2+(3y-1)^2}+\sqrt{(2x-3y)^2+9y^2}.$$

Т3.9. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=2y\sqrt{-x^2-2x}+(x+1)\sqrt{3+4y-8y^2}.$$

Т3.10. Найдите наибольшее значение выражения

$$z=2\cos x-\cos y+\cos(x-y).$$

Т3.1

Т3.2

Т3.3

Т3.4

Т3.5

Т3.6

Т3.7

Т3.8

Т3.9

Т3.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 4

T4.1

T4.2

T4.3

T4.4

T4.5

T4.6

T4.7

T4.8

T4.9

T4.10

T4.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 + \frac{12}{x^2+1} + 4.$$

T4.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2-7} \cdot \sqrt{13-x^2}.$$

T4.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2-6x+10} + \sqrt{x^2+10x+50}.$$

T4.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\sqrt{7-3x} + 12\sqrt{3x+29} + 22.$$

T4.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \\ + \sqrt{(x-5)^2+(2x-5)^2} - \sqrt{9x^2-42x+65} + 7.$$

T4.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{4x^2-12x+18} - \sqrt{x^2-2x+5} - \sqrt{x^2-4x+5}.$$

T4.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + 4x + |x^2-2| + |x^2-5|.$$

T4.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9^{0,5+|4x-5|-|x^2-3x+1|-|x^2+x-4|}.$$

T4.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + x\sqrt{x^2+16} - 9$$

на отрезке $[-3; 3]$.

T4.10. Найдите наименьшее значение выражения

$$z = |2x-3y| + \sqrt{4x^2+(y+1)^2}.$$

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 1

Ответы:

Д1.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 4^x + 5x + 1 \quad \text{на отрезке } [-1; 2].$$

Д1.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \cos 2x - 4\cos x + 4.$$

Д1.3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-5}.$$

Д1.4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3\sin x + 4x + 5 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{8}\right].$$

Д1.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sin x + 4\sqrt{1-\sin x} - 5.$$

Д1.6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 - 4|x| + 11}{2|x| - 1} \quad \text{на отрезке } [1; 3].$$

Д1.7. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{\log_2 x \log_2 \frac{4}{x}} \quad \text{на отрезке } \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right].$$

Д1.8. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5^{3x-2} + 16 \cdot 5^{6-3x}.$$

Д1.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |\log_5 x| + |\log_5 x - 3| + \log_7^4 (26 - x).$$

Д1.10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{\log_{0,5}^2 x + 4} + \sqrt{(\log_{0,5} x - 6)^2 + 36}.$$

Д1.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$z = 3(\sin x + \cos y) + 4(\cos x + \sin y).$$

Д1.12. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$z = \frac{x^2(y+1)^2}{(2x^2 - 2x + 1)(2y^2 + 2y + 1)}.$$

Д1.1

Д1.2

Д1.3

Д1.4

Д1.5

Д1.6

Д1.7

Д1.8

Д1.9

Д1.10

Д1.11

Д1.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д2.1

Д2.2

Д2.3

Д2.4

Д2.5

Д2.6

Д2.7

Д2.8

Д2.9

Д2.10

Д2.11

Д2.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 2

Д2.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x - 2\sqrt{x-4} + 3 \quad \text{на отрезке } [5;\, 8].$$

Д2.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2x + 3 + 6|x-1| - x^2 \quad \text{на отрезке } [-2;\, 2].$$

Д2.3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2^{\frac{4x-5}{x^2-4x+5}}.$$

Д2.4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sqrt[3]{\frac{4x+3}{x^2+1}}.$$

Д2.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 1 + \log_2(3\sqrt{2x-1} - x - 1) \quad \text{на отрезке } [1;\, 7].$$

Д2.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos x + \cos 2x - \cos^2 x}.$$

Д2.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7^{x-3} + 7^{5-x}.$$

Д2.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\sin 3x - 12\cos 3x + 7.$$

Д2.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 3x + \frac{4}{x^2-3x+2} + 2 \quad \text{на отрезке } [2{,}5;\, 3{,}5].$$

Д2.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2^{5-|x^2-6|-|x^2-7|}.$$

Д2.11. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \lg(4 \cdot 3^{2x+3} + 3 \cdot 9^{1-x} - 8).$$

Д2.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x\sin x + \sqrt{9-x^2}\cos x + 4.$$

§ 3. Первообразная

Ответы:

Диагностическая работа

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x+2}{5},$$

если $F(4)=5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

1

2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

на отрезке $[0; 6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

2

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x^3+2}{x^3}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1)=2$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

3

4. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\frac{6}{x^2}$$

на промежутке $(-\infty; 0)$ проходит через точку $(-2; -3)$. Решите уравнение $F(x)=f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

4

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{11}{\sqrt{x}} + 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(4) = -15$. В ответе укажите значение $F(9)$.

5

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если график первообразной пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(8)$.

6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

7

7. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x - 2\cos x$$

проходит через точку $(-\pi; 0)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

8

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2 + \sin 4x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

9

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 4x + 3,$$

если $F(1) = e$. В ответе укажите значение $F(0)$.

10

10. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 2x + 1$$

на отрезке $[0; 2]$ равно e^2. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

11

11. В какой точке отрезка $[12; 22]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

12

12. В какой точке отрезка $\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-5)\ln(x-1)$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Методические рекомендации

Этот параграф посвящен повторению темы «Первообразная». Напомним, что если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, то существует такая функция $F(x)$, что для всех значений переменной из этого промежутка $F'(x)=f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y=f(x)$ на данном промежутке. Иногда предлог «для» опускают и пишут или говорят, что $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

В курсе школьной математики рассматриваются только функции, которые непрерывны в любой точке своей области определения. Значит, для каждой из них существует первообразная, но нужно понимать, что если область определения функции состоит, например, из двух промежутков (на каждом из которых функция непрерывна), то первообразные на этих промежутках могут иметь различный вид.

Из свойств производной следует, что если $F(x)$ — первообразная для функции $y=f(x)$ и C — произвольное действительное число, то $F(x)+C$ также будет первообразной для функции $y=f(x)$, поскольку

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Более того, в курсе математического анализа доказывается, что если $F(x)$ и $G(x)$ — две различные первообразные для функции $y=f(x)$, то

$$G(x)=F(x)+C,$$

где C — некоторое действительное число, т. е. что любая первообразная для функции $y=f(x)$ имеет вид $F(x)+C$. Это, в частности, означает, что график любой первообразной для данной функции может быть получен из графика любой другой ее первообразной параллельным переносом вдоль оси ординат. Для того чтобы найти конкретную первообразную, обычно задают дополнительное условие, например значение первообразной в некоторой точке или точку, через которую проходит график первообразной (что по сути то же самое, отличие только в формулировке).

Можно выделить два основных типа задач на первообразную. К первому относятся задачи, связанные с непосредственным вычислением первообразных. Ко второму — задачи, связанные с исследованием первообразной с помощью данной функции: ведь она является производной для любой своей первообразной, и значит, позволяет находить промежутки монотонности и точки экстремума первообразной, ее наименьшее и наибольшее значение на отрезке. Вычисление самой первообразной при этом иногда даже не предполагается (и не требуется условием задачи), а порой бывает попросту невозможно: не для каждой непрерывной на промежутке функции возможно в явном виде написать первообразную.

Приведем таблицу первообразных для некоторых функций (C — произвольное действительное число).

$y=f(x)$	$F(x)$
$f(x)=k,\quad k$ — произвольное действительное число	$F(x)=kx+C$
$f(x)=x^p,\quad p\neq -1$	$F(x)=\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C$
$f(x)=\sqrt{x}$	$F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$F(x)=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$F(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=a^x,\quad a>0,\quad a\neq 1$	$F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x+C$
$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x+C$

Обратим внимание на то, что первообразные для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеют различный вид в зависимости от промежутка, на котором рассматривается функция. Так, на промежутке $(0;+\infty)$ первообразная для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ имеет вид $F(x)=\ln x+C$, а на промежутке $(-\infty;0)$ задается формулой $F(x)=\ln(-x)+C$ (C — произвольное действительное число). В тех случаях, когда функция $y=f(x)$ определена не на всей числовой прямой, а на каком-то ее промежутке, этот промежуток часто не указывается, а как бы считается «заданным по умолчанию»: так, областью определения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является промежуток $(0;+\infty)$, на котором она непрерывна, поэтому ее первообразная $F(x)=2\sqrt{x}+C$ (C — произвольное действительное число) рассматривается именно на этом промежутке.

При вычислении первообразных иррациональных функций следует помнить о том, что корень нечетной степени $\sqrt[2n+1]{x}$ и степень с дробным показателем $x^{\frac{1}{2n+1}}$ имеют разные области определения (а значит, и непрерывности): первый определен при любых действительных значениях переменной, вторая — только при неотрицательных. Для вычисления первообразных запись в виде степени, конечно же, более удобна, но результат этого вычисления должен быть приведен в виде корня (как и промежуточные выкладки, если речь идет о задаче с полным решением; впрочем, эти выкладки можно оставить в черновике). Именно поэтому в таблице наряду с табличными указаны первообразные для наиболее часто встречающихся иррациональных функций.

Напомним теперь основные правила вычисления первообразных. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ являются на некотором промежутке первообразными для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, и пусть k, b и C — произвольные действительные числа. Тогда на рассматриваемом промежутке:

1) $F(x)+G(x)$ и $F(x)-G(x)$ являются соответственно первообразными для функций $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ (краткая формулировка: первообразная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) первообразных этих функций);

2) $kF(x)$ является первообразной для функции $kf(x)$ (краткая формулировка: первообразная произведения функции на число равна произведению первообразной этой функций на то же число);

3) $\frac{1}{k}F(kx+b)$ является первообразной для функции $f(kx+b)$ (здесь, разумеется, $k\neq 0$).

Так, для функции

$$f(x)=3x^2-4x+7$$

первообразная имеет вид

$$F(x)=x^3-2x^2+7x+C;$$

для функции $f(x)=\cos(4x+5)$ первообразной является

$$F(x)=\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C.$$

Формул для вычисления первообразной произведения или частного двух функций (в отличие от формул для вычисления производной произведения или частного двух функций) не существует. Поэтому если требуется найти производную произведения или частного функций, то сначала следует сделать необходимые алгебраические преобразования. Так, функцию $f(x)=x^2x^3(x+1)$ нужно привести к виду $f(x)=x^6+x^5$ (первообразной будет функция $F(x)=\frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{6}+C$), а функцию $f(x)=\frac{3x^5+2x^4+x}{x^2}$ — к виду $f(x)=3x^3+2x^2+\frac{1}{x}$ (первообразной будет функция $F(x)=x^4+x^3+\ln|x|+C$); здесь C — произвольное действительное число. Перейдем к примерам, разобрав задания диагностической работы — по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса математики.

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы

1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{3x+2}{5}$, если $F(4)=5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

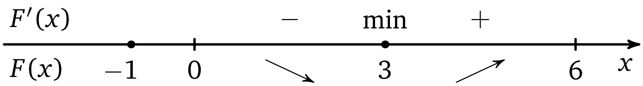
$$F(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}4x + C.$$

По условию $F(4)=5$, значит, $0{,}3 \cdot 4^2 + 0{,}4 \cdot 4 + C = 5$, откуда $C=-1{,}4$ и $F(1)=0{,}3+0{,}4-1{,}4=-0{,}7$.

Ответ: $F(x)=0{,}3x^2+0{,}4x-1{,}4$; $F(1)=-0{,}7$.

2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-2x-3$ на отрезке $[0;6]$ равно -9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x)=f(x)=x^2-2x-3$. Корнями квадратного трехчлена x^2-2x-3 являются числа -1 и 3. Поэтому $F'(x)=(x+1)(x-3)$. Исследуем $F(x)$ на данном отрезке с помощью производной.



Значит, $\min\limits_{[0;6]} F(x)=F(3)=-9$, а наибольшее значение $F(x)$ принимает на одном из концов отрезка $[0;6]$. Теперь найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$. Следовательно,

$$F(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 + C = -9 + C.$$

Поэтому $-9+C=-9$, откуда $C=0$ и $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$. Найдем значения $F(x)$ на концах отрезка $[0;6]$:

$$F(0)=0, \quad F(6) = \frac{1}{3}\cdot 6^3 - 6^2 - 3\cdot 6 = 18.$$

Таким образом, $\max\limits_{[0;6]} F(x)=F(6)=18$.

Ответ: 18.

Тренировочная работа 1

Т1.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{4x+3}{2}$, если $F(3)=2$. В ответе укажите значение $F(0)$.

Т1.2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = x^2(4x+3)$, если известно, что график первообразной проходит через точку $(2; 34)$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

Т1.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = x(2x-1)^2,$$

если $F(0)=-\frac{1}{6}$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Т1.4. Один из двух нулей первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 5x-1$$

равен -3. Найдите второй нуль.

Т1.5. График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=4x+6$ пересекает ось абсцисс в точках, расстояние между которыми равно 2. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

Т1.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=4x+2$, если множеством значений первообразной является луч $[-4; +\infty)$. В ответе укажите значение $F(-2)$.

Т1.7. В какой точке отрезка $[0; 8]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-3x-4$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Т1.8. В какой точке отрезка $[-7; 13]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=7x-x^2-13$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

Т1.9. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2-14x+11$ на отрезке $[0; 2]$ равно 1. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

Т1.10. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=x^2-2x+18$ на отрезке $[3; 6]$ равно 64. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

Ответы:

Т1.1

Т1.2

Т1.3

Т1.4

Т1.5

Т1.6

Т1.7

Т1.8

Т1.9

Т1.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 диагностической работы

3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3x^3+2}{x^3}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1)=2$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, получим, что $f(x)=3+2\cdot x^{-3}$. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами: $F(x)=3x-x^{-2}+C$. По условию $F(1)=2$, значит, $2+C=2$, откуда $C=0$ и $F(x)=3x-\frac{1}{x^2}$. Поэтому

$$F(0{,}5) = 3\cdot 0{,}5 - \frac{1}{0{,}5^2} = 1{,}5 - 1 : \frac{1}{4} = -2{,}5.$$

Ответ: $F(x)=3x-\frac{1}{x^2}$; $F(0{,}5)=-2{,}5$.

4. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\frac{6}{x^2}$$

на промежутке $(-\infty; 0)$ проходит через точку $(-2; -3)$. Решите уравнение $F(x)=f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

Решение. Запишем данную функцию в виде $f(x)=-6x^{-2}$ и найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами: $F(x)=6x^{-1}+C$, или $F(x)=\frac{6}{x}+C$. Из условия следует, что $F(-2)=-3$, откуда $\frac{6}{-2}+C=-3$ и, следовательно, $C=0$. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{6}{x}=-\frac{6}{x^2}$. Поскольку $x\neq 0$, домножив обе части уравнения на $\frac{x^2}{6}$, найдем $x=-1$.

Ответ: -1.

Тренировочная работа 2

Т2.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{3}{x}$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(2)=3\ln 2+1$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Т2.2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{4}{x}$$

на промежутке $(-\infty;0)$, если $F(-3)=4\ln 3-2$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

Т2.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{4}{x-5}$$

на промежутке $(5;+\infty)$, если $F(9)=4\ln 4+4$. В ответе укажите значение $F(6)$.

Т2.4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{3}{x-4}$$

на промежутке $(-\infty;4)$, если $F(-3)=3\ln 7+9$. В ответе укажите значение $F(3)$.

Т2.5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{8}{4x+3}$$

на промежутке $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$, если $F(0)=2\ln 3-5$. В ответе укажите значение $F(-0{,}5)$.

Т2.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{3}{2x^2}$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если график первообразной проходит через точку $(0{,}5;5)$. В ответе укажите значение $F(3)$.

Т2.7. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{4x^2-3}{x^2}$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(0{,}25)=-11$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

Ответы:

Т2.1

Т2.2

Т2.3

Т2.4

Т2.5

Т2.6

Т2.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T2.8

T2.9

T2.10

T2.8. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{15}{x^2},$$

заданной на промежутке $(0;+\infty)$, проходит через точку $\left(\frac{1}{3};0\right)$. Решите уравнение $F(x)=5f(x)+39$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший корень.

T2.9. В какой точке отрезка $[-3;12]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x^2+16}$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

T2.10. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{10x}{10x+\dfrac{1}{10x-\dfrac{1}{10x}}}$$

на промежутке $(0{,}1;+\infty)$, если график первообразной проходит через точку $(1;1)$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Иррациональные функции.
Решения задач 5 и 6 диагностической работы

5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{11}{\sqrt{x}}+2$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если $F(4)=-15$. В ответе укажите значение $F(9)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x)=2x+22\sqrt{x}+C.$$

По условию $F(4)=-15$, значит, $8+44+C=-15$, откуда $C=-67$ и $F(9)=18+66-67=17$.

Ответ: $F(x)=2x+22\sqrt{x}-67$; $F(9)=17$.

6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

на промежутке $(0;+\infty)$, если график первообразной пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(8)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x)=\sqrt[3]{x^2}+C.$$

Из условия следует, что график первообразной проходит через точку с абсциссой 1, лежащую на прямой $y=2x-3$, т. е. через точку $(1;-1)$. Значит, $F(1)=-1$, откуда $1+C=-1$ и, следовательно, $C=-2$. Поэтому

$$F(8)=\sqrt[3]{8^2}-2=2.$$

Ответ: $F(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$; $F(8)=2$.

Ответы:

T3.1

T3.2

T3.3

T3.4

T3.5

T3.6

T3.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 3

T3.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 6\sqrt{x} + 5$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1) = 9$. В ответе укажите значение $F(4)$.

T3.2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \quad \text{на промежутке } (0; +\infty),$$

если $F(4) = 13$. В ответе укажите значение $F(1)$.

T3.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4 - \frac{11}{\sqrt{x}} \quad \text{на промежутке } (0; +\infty),$$

если $F(25) = 12$. В ответе укажите значение $F(4)$.

T3.4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} + 5,$$

если известно, что график первообразной проходит через точку $(8; 94)$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

T3.5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 23\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x},$$

если $F(-1) = -3$. В ответе укажите значение $F(1)$.

T3.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + 5 \quad \text{на промежутке } (0; +\infty),$$

если $F(8) = 32\sqrt{2} + 92$. В ответе укажите значение $F(1)$.

T3.7. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 21x^3 \cdot \sqrt[5]{x},$$

если график первообразной пересекает график функции

$$y = 21x^5 \cdot \sqrt[3]{x}$$

в точке с абсциссой 1. В ответе укажите значение $F(-1)$.

Ответы:

Т3.8. Найдите наименьшее значение на отрезке [1; 8] первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 8\sqrt[3]{x} + 7,$$

если ее наибольшее значение на этом отрезке равно 96.

Т3.8

Т3.9. В какой точке отрезка $[-9; 9]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 11x + 10}{4\sqrt[3]{x^2} + 5}$$

достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

Т3.9

Т3.10. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 21x\sqrt[3]{x},$$

если график первообразной пересекает график производной этой функции $f(x)$ в точке с абсциссой -1. В ответе укажите значение $F(1)$.

Т3.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы

7. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x - 2\cos x$$

проходит через точку $(-\pi; 0)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

По условию $F(-\pi) = 0$, значит, $3 + C = 0$, откуда $C = -3$ и $F(0) = -3 - 3 = -6$.

Ответ: -6.

8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2 + \sin 4x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

По условию $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\pi$, значит, $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} + C = -3\pi$, откуда

$$C = -\frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4} = 0.$$

Ответ: $F(x) = 2x - \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{7\pi}{2} - \frac{1}{4}$; $F\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0$.

Ответы:

Тренировочная работа 4

Т4.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2\cos x,$$

если $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5$. В ответе укажите значение $F(\pi)$.

Т4.1

Т4.2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = -3\sin x,$$

если $F(-\pi) = 7$. В ответе укажите значение $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Т4.2

Т4.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = -8\cos 4x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{24}\right) = 24$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Т4.3

Т4.4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 6\sin 3x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = 9$. В ответе укажите значение $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Т4.4

Т4.5. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x$$

проходит через точку $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\right)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

Т4.5

Т4.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3 - 2\cos 2x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Т4.6

Т4.7. В какой точке отрезка $[-13; 7]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4\sin^{50} x + 5\cos^{60} x + 6$$

достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

Т4.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т4.8

Т4.9

Т4.10

Т4.8. В какой точке отрезка $[-4; 11]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x^2 - 36)(\sin^2 x + 36)$$

достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?

Т4.9. Наибольшее значение на отрезке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2\cos x - 3$$

равно $\frac{9\pi}{2}$. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

Т4.10. Наименьшее значение на отрезке $[0; \pi]$ первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 6\pi \sin 3x + 25$$

равно -29π. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Показательная функция.
Решения задач 9 и 10 диагностической работы

9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = e^x + 4x + 3, \quad \text{если } F(1) = e.$$

В ответе укажите значение $F(0)$.

Решение. Найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = e^x + 2x^2 + 3x + C.$$

По условию $F(1) = e$, значит, $e + 2 + 3 + C = e$, откуда $C = -5$ и $F(0) = 1 - 5 = -4$.

Ответ: $F(x) = e^x + 2x^2 + 3x - 5$; $F(0) = -4$.

10. Наибольшее значение первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = e^x + 2x + 1$ на отрезке $[0; 2]$ равно e^2. Найдите наименьшее значение первообразной на этом отрезке.

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x) = f(x) = e^x + 2x + 1$. На данном отрезке $e^x + 2x + 1 > 0$. Поэтому $F'(x) > 0$ и функция $y = F(x)$ возрастает на отрезке $[0; 2]$.

Значит,

$$\min_{[0;2]} F(x) = F(0), \quad \max_{[0;2]} F(x) = F(2) = e^2.$$

Теперь найдем первообразную, воспользовавшись таблицей первообразных и их свойствами:

$$F(x) = e^x + x^2 + x + C.$$

Следовательно,

$$F(2) = e^2 + 4 + 2 + C = e^2 + 6 + C.$$

Поэтому $e^2 + 6 + C = e^2$, откуда $C = -6$ и $F(0) = 1 - 6 = -5$.

Ответ: -5.

Ответы:

T5.1

T5.2

T5.3

T5.4

T5.5

T5.6

T5.7

T5.8

T5.9

T5.10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 5

T5.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = e^x,$$
если $F(\ln 4) = 5$. В ответе укажите значение $F(0)$.

T5.2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2e^x - 3,$$
если $F(2) = 2e^2 + 7$. В ответе укажите значение $F(0)$.

T5.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 6e^{2x},$$
если $F(0{,}5) = 3e + 4$. В ответе укажите значение $F(0)$.

T5.4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 5e^x + 6,$$
если $F(1) = 5e + 8$. В ответе укажите значение $F(0)$.

T5.5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2^x \ln 2,$$
если $F(2) = 7$. В ответе укажите значение $F(3)$.

T5.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2^x \ln 2,$$
если $F(3) = 5$. В ответе укажите значение $F(1)$.

T5.7. Наибольшее значение на отрезке $[1; 2]$ первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = 5^x \ln 5 + 4$$
равно 10. Найдите наименьшее значение $F(x)$ на этом отрезке.

T5.8. Наименьшее значение на отрезке $[1; 4]$ первообразной $F(x)$ для функции
$$f(x) = 2^x \ln 2 + 2x + 1$$
равно -2. Найдите наибольшее значение $F(x)$ на этом отрезке.

T5.9. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ первообразная $F(x)$ для функции
$$f(x) = (3^x - 3)(x - 4)$$
достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?

T5.10. В какой точке числовой оси первообразная $F(x)$ для функции
$$f(x) = (7^x - 49)(x^2 - 4)$$
достигает своего наименьшего значения?

Логарифмическая функция.
Решения задач 11 и 12 диагностической работы

11. В какой точке отрезка $[12; 22]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$$

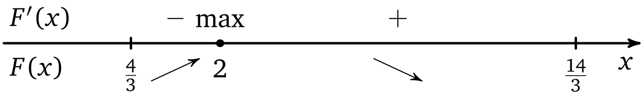
достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x) = f(x) = -1 - \ln^2(x-2)$. На данном отрезке $-1 - \ln^2(x-2) < 0$. Поэтому $F'(x) < 0$ и функция $y = F(x)$ убывает на отрезке $[12; 22]$. Значит, своего наименьшего значения эта функция достигает в правом конце отрезка, т. е. при $x = 22$.

Ответ: 22.

12. В какой точке отрезка $\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ первообразная $F(x)$ для функции $f(x) = (x-5)\ln(x-1)$ достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Решение. Из определения первообразной и условия получаем, что $F'(x) = f(x) = (x-5)\ln(x-1)$. При любом значении переменной $x \in \left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]$ число $x-5$ отрицательно. Далее, $\ln(x-1) = 0$ при $x = 2$; $\ln(x-1) > 0$ при $x > 2$; $\ln(x-1) < 0$ при $x < 2$. Исследуем $F(x)$ на данном отрезке с помощью производной.



Следовательно, $\max\limits_{\left[\frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right]} F(x) = F(2)$.

Ответ: 2.

Ответы:

T6.1

T6.2

T6.3

T6.4

T6.5

T6.6

T6.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Тренировочная работа 6

Т6.1. В какой точке отрезка $[6; 26]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\ln x$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

Т6.2. В какой точке отрезка $[0{,}5; 5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-5)\ln x$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Т6.3. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_3(x+4)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 5. Найдите угловой коэффициент касательной.

Т6.4. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 8x + \log_7(x+6)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 1. Найдите угловой коэффициент касательной.

Т6.5. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = x\log_2 x$$

проведена касательная в точке с абсциссой 8. Найдите тангенс угла, который эта касательная образует с положительным направлением оси абсцисс.

Т6.6. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 3\cos x + 4\log_5(x+1)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 0. Найдите тангенс угла, который эта касательная образует с положительным направлением оси абсцисс.

Т6.7. К графику первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_{11}(x^2+2)$$

проведена касательная в точке с абсциссой 3. Найдите угол, который эта касательная образует с положительным направлением оси абсцисс. Ответ дайте в градусах.

Ответы:

Т6.8. В скольких целых точках отрезка [11; 21] значения первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_7(x - 10)$$

меньше, чем ее значение в точке 17?

Т6.9. В скольких целых точках отрезка [−2; 4] значения первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x - 4)\log_4(x + 4)$$

больше, чем ее значение в точке 3?

Т6.10. Найдите точку максимума первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = (2x^2 - 5x + 2)\log_7(x - 0{,}5).$$

Т6.8

Т6.9

Т6.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д1.1

Д1.2

Д1.3

Д1.4

Д1.5

Д1.6

Д1.7

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 1

Д1.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4x + 3,$$

если $F(2) = 15$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

Д1.2. Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 5 + 4x - x^2$$

на отрезке $[-3; 3]$ равно $\frac{1}{3}$. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.

Д1.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(2) = 5{,}5$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

Д1.4. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\frac{8}{x^3}$$

на промежутке $(-\infty; 0)$ проходит через точку $(-1; 4)$. Решите уравнение $F(x) = f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший корень.

Д1.5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 4$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(9) = 55$. В ответе укажите значение $F(4)$.

Д1.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x},$$

если график первообразной пересекает параболу $y = 2x^2 + 3x$ в точке с абсциссой -1. В ответе укажите значение $F(-8)$.

Д1.7. График первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 5\sin x + 6\cos x$$

проходит через точку $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\right)$. В какой точке график первообразной пересекает ось ординат? В ответе укажите ординату этой точки.

Ответы:

Д1.8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4 - 3\sin 3x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{9}$. В ответе укажите значение $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

Д1.9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 6e^x + 4,$$

если $F(1) = 6e + 5$. В ответе укажите значение $F(0)$.

Д1.10. Найдите наибольшее на отрезке $[-1; 3]$ значение первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = 4^x \ln 4 - 5 \cdot 2^x \ln 2,$$

если график этой первообразной проходит через начало координат.

Д1.11. В какой точке отрезка $[5{,}5; 15{,}5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_5(x - 5)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

Д1.12. В скольких целых точках отрезка $[-7; 7]$ значения первообразной $F(x)$ для функции

$$f(x) = -\log_3(11 - x)$$

меньше, чем ее значение в точке 2?

Д1.8

Д1.9

Д1.10

Д1.11

Д1.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д2.1

Д2.2

Д2.3

Д2.4

Д2.5

Д2.6

Д2.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 2

Д2.1. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 13x^3 \cdot x^4 \cdot x^5,$$

если $F(0) = 1$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

Д2.2. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4},$$

если график этой первообразной проходит через точку $(-3; 6)$. В ответе укажите значение $F(3)$.

Д2.3. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6}{x^3 \cdot x^5 \cdot x^7}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(1) = 2{,}5$. В ответе укажите значение $F(0{,}5)$.

Д2.4. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^4 + 4x^2} \quad \text{на промежутке } (0; +\infty),$$

если график этой первообразной проходит через точку $(0{,}25; 5)$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Д2.5. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5x^{\frac{1}{4}}}{4}$$

на промежутке $(0; +\infty)$, если $F(16) = 50$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Д2.6. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \sqrt[13]{x^4 \cdot \sqrt[7]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}},$$

если график этой первообразной проходит через точку $(8; 12{,}25)$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Д2.7. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x,$$

если $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{8}$. В ответе укажите значение $F(\pi)$.

Ответы:

Д2.8. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x,$$

если график этой первообразной проходит через точку $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{5}{4}\right)$. В ответе укажите значение $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Д2.8

Д2.9. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x \cdot \ln 30,$$

если $F(2) = 1000$. В ответе укажите значение $F(1)$.

Д2.9

Д2.10. Найдите первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x) = 2^{x+3} \cdot 3^{x+2} \cdot \ln 6,$$

если график этой первообразной проходит через точку $(0; 73)$. В ответе укажите значение $F(-1)$.

Д2.10

Д2.11. В какой точке отрезка $[-1{,}5; 2{,}5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = \log_3(x+2)$$

достигает своего наименьшего значения на этом отрезке?

Д2.11

Д2.12. В какой точке отрезка $[3{,}5; 7{,}5]$ первообразная $F(x)$ для функции

$$f(x) = (x-4)\log_{0{,}7}(x-3)$$

достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Д2.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы

§ 1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной

Диагностическая работа

1. −4. **2.** −54. **3.** 5. **4.** −6. **5.** 4. **6.** −3. **7.** 0,5. **8.** 8. **9.** 19. **10.** −1. **11.** 5. **12.** 19.

Тренировочная работа 1

Т1.1. −4. **Т1.2.** 0. **Т1.3.** 14. **Т1.4.** −14. **Т1.5.** 15. **Т1.6.** 24. **Т1.7.** −2. **Т1.8.** −35. **Т1.9.** 162. **Т1.10.** 2.

Тренировочная работа 2

Т2.1. 1. **Т2.2.** 2. **Т2.3.** 2. **Т2.4.** −2. **Т2.5.** 3. **Т2.6.** −4. **Т2.7.** 2. **Т2.8.** −2. **Т2.9.** 4. **Т2.10.** −3.

Тренировочная работа 3

Т3.1. 1. **Т3.2.** 0. **Т3.3.** 5. **Т3.4.** 4. **Т3.5.** −29. **Т3.6.** 256. **Т3.7.** −32. **Т3.8.** 3. **Т3.9.** −4. **Т3.10.** 108.

Тренировочная работа 4

Т4.1. 48. **Т4.2.** −21. **Т4.3.** −11. **Т4.4.** −3. **Т4.5.** 80. **Т4.6.** −35. **Т4.7.** −4. **Т4.8.** −60. **Т4.9.** −80. **Т4.10.** 45.

Тренировочная работа 5 (Т5)

Т5.1. −4. **Т5.2.** 6. **Т5.3.** 8. **Т5.4.** 2. **Т5.5.** 2. **Т5.6.** −3. **Т5.7.** 1. **Т5.8.** −2. **Т5.9.** −3. **Т5.10.** −4.

Тренировочная работа 6

Т6.1. 8. **Т6.2.** −7. **Т6.3.** 6. **Т6.4.** −24. **Т6.5.** 30. **Т6.6.** −6. **Т6.7.** 10. **Т6.8.** −12. **Т6.9.** 27. **Т6.10.** −25.

Тренировочная работа 7

Т7.1. 3. **Т7.2.** 2. **Т7.3.** 2. **Т7.4.** 3. **Т7.5.** 35. **Т7.6.** 36. **Т7.7.** 10. **Т7.8.** 5. **Т7.9.** 0,9. **Т7.10.** 1,3.

Тренировочная работа 8

Т8.1. 9. **Т8.2.** 4. **Т8.3.** 1. **Т8.4.** 16. **Т8.5.** 3. **Т8.6.** 2. **Т8.7.** 4. **Т8.8.** 5. **Т8.9.** 1. **Т8.10.** 1.

Тренировочная работа 9

Т9.1. −16. **Т9.2.** −4. **Т9.3.** 81. **Т9.4.** 16. **Т9.5.** −16. **Т9.6.** 16. **Т9.7.** −48. **Т9.8.** 17. **Т9.9.** −103. **Т9.10.** 59.

Тренировочная работа 10

Т10.1. −7. **Т10.2.** −23. **Т10.3.** 16. **Т10.4.** 0. **Т10.5.** −39. **Т10.6.** −4. **Т10.7.** 8. **Т10.8.** 12. **Т10.9.** 14. **Т10.10.** 12.

Тренировочная работа 11

Т11.1. 3. **Т11.2.** 1,5. **Т11.3.** 1,2. **Т11.4.** 0,5. **Т11.5.** 2,5. **Т11.6.** 0,75. **Т11.7.** 0,25. **Т11.8.** 1,25. **Т11.9.** 0,4. **Т11.10.** 2,5.

Тренировочная работа 12

Т12.1. 6. **Т12.2.** 34. **Т12.3.** 14. **Т12.4.** 7. **Т12.5.** −1. **Т12.6.** 14. **Т12.7.** −6. **Т12.8.** 8. **Т12.9.** −10. **Т12.10.** −18.

Тренировочная работа 13

Т13.1. 49. **Т13.2.** 0,01. **Т13.3.** 36. **Т13.4.** −81. **Т13.5.** 36. **Т13.6.** 2. **Т13.7.** −9. **Т13.8.** −6. **Т13.9.** 21. **Т13.10.** 45.

Тренировочная работа 14

Т14.1. 3. **Т14.2.** 0. **Т14.3.** 13. **Т14.4.** −1. **Т14.5.** 2. **Т14.6.** 4. **Т14.7.** 5. **Т14.8.** 7. **Т14.9.** 1. **Т14.10.** −3.

Тренировочная работа 15

Т15.1. 7. **Т15.2.** 14. **Т15.3.** 4. **Т15.4.** 4. **Т15.5.** −2. **Т15.6.** 10. **Т15.7.** 0. **Т15.8.** 4. **Т15.9.** −1. **Т15.10.** 2.

Тренировочная работа 16

Т16.1. 4. **Т16.2.** 5. **Т16.3.** 0,24. **Т16.4.** 0,9. **Т16.5.** 7. **Т16.6.** 15. **Т16.7.** 16. **Т16.8.** 0,25. **Т16.9.** 6. **Т16.10.** 60.

Тренировочная работа 17

Т17.1. 0,4. **Т17.2.** 9. **Т17.3.** 8. **Т17.4.** 5. **Т17.5.** 9,5. **Т17.6.** 3. **Т17.7.** 11,5. **Т17.8.** −4,8. **Т17.9.** 4. **Т17.10.** 3.

Тренировочная работа 18

Т18.1. −20. **Т18.2.** 13. **Т18.3.** 19. **Т18.4.** 6. **Т18.5.** 2. **Т18.6.** 12. **Т18.7.** −1. **Т18.8.** 10. **Т18.9.** −7. **Т18.10.** 9.

Диагностическая работа 1

Д1.1. −2. **Д1.2.** 6. **Д1.3.** −4. **Д1.4.** 12. **Д1.5.** 4. **Д1.6.** 1. **Д1.7.** 1,5. **Д1.8.** 5. **Д1.9.** 6. **Д1.10.** 1. **Д1.11.** 0,5. **Д1.12.** 9.

Диагностическая работа 2

Д2.1. 2. **Д2.2.** 0. **Д2.3.** 7. **Д2.4.** 0. **Д2.5.** 9. **Д2.6.** 33. **Д2.7.** 1. **Д2.8.** 12. **Д2.9.** 17. **Д2.10.** 5. **Д2.11.** 7. **Д2.12.** 2.

Диагностическая работа 3

Д3.1. 3. **Д3.2.** 108. **Д3.3.** −3. **Д3.4.** 24. **Д3.5.** 25. **Д3.6.** −245. **Д3.7.** 2. **Д3.8.** −3. **Д3.9.** −7. **Д3.10.** −1. **Д3.11.** 2,5. **Д3.12.** 6.

Диагностическая работа 4

Д4.1. 1. **Д4.2.** −2. **Д4.3.** −15. **Д4.4.** −10. **Д4.5.** 36. **Д4.6.** 54. **Д4.7.** 1,25. **Д4.8.** −11. **Д4.9.** −6. **Д4.10.** 1. **Д4.11.** −1. **Д4.12.** −1.

Диагностическая работа 5

Д5.1. 5. **Д5.2.** 20. **Д5.3.** −4. **Д5.4.** 91. **Д5.5.** 400. **Д5.6.** 25. **Д5.7.** 1,5. **Д5.8.** 3. **Д5.9.** 46. **Д5.10.** 2. **Д5.11.** 0,2. **Д5.12.** −18.

§ 2. Вычисление наибольших и наименьших значений функций без применения производной

Диагностическая работа

1. $\min y(x)=y\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}$. **2.** $\max y(x)=y\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{5}{4}$. **3.** $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=y(2)=63$, $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=y(0)=-1$. **4.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=3$ достигается при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-1$ достигается при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** $\min y(x)=y(-1)=-1$; $\max y(x)=y\left(\frac{3}{2}\right)=4$. **6.** $\max y(x)=y(1-\sqrt{2})=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$. **7.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y\left(\frac{2+\log_3 2}{2}\right)=12$. **8.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y(0)=1$. **9.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=\sqrt{2}-2$ достигается при $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-\sqrt{2}-2$ достигается при $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=y\left(\frac{8}{3}\right)=\sqrt{10}$. **11.** $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$.
12. $\min\limits_{(0;\infty)} y(x)=y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=0$.

Тренировочная работа 1

Т1.1. 9. **Т1.2.** 1. **Т1.3.** 4. **Т1.4.** 7. **Т1.5.** 81. **Т1.6.** 2. **Т1.7.** 4. **Т1.8.** −3. **Т1.9.** 2,25. **Т1.10.** 2.

Тренировочная работа 2

Т2.1. 3. **Т2.2.** −3. **Т2.3.** −0,125. **Т2.4.** 0,5. **Т2.5.** 1,875. **Т2.6.** 16. **Т2.7.** 0. **Т2.8.** −20. **Т2.9.** 36. **Т2.10.** −0,5.

Тренировочная работа 3

Т3.1. 1. **Т3.2.** 9. **Т3.3.** 5. **Т3.4.** 30. **Т3.5.** 5. **Т3.6.** 5. **Т3.7.** 12. **Т3.8.** 1. **Т3.9.** 2. **Т3.10.** 2,25.

Тренировочная работа 4

Т4.1. 13. **Т4.2.** 3. **Т4.3.** 10. **Т4.4.** 100. **Т4.5.** 7. **Т4.6.** 0. **Т4.7.** −1. **Т4.8.** 3. **Т4.9.** −15. **Т4.10.** $0{,}3\sqrt{10}$.

Диагностическая работа 1

Д1.1. $\min\limits_{[-1;2]} y(x)=-3{,}75$; $\max\limits_{[-1;2]} y(x)=27$. **Д1.2.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=1$; $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=9$. **Д1.3.** 2. **Д1.4.** 5. **Д1.5.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=4\sqrt{2}-6$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-4$. **Д1.6.** $\sqrt{19}-1$. **Д1.7.** 1. **Д1.8.** 200. **Д1.9.** 3. **Д1.10.** 10. **Д1.11.** $\max z(x;y)=10$; $\min z(x;y)=-10$. **Д1.12.** $\max z(x;y)=1$; $\min z(x;y)=0$.

Диагностическая работа 2

Д2.1. 6. **Д2.2.** **Д1.4.** $\max\limits_{[-2;2]} y(x)=13$; $\min\limits_{[-2;2]} y(x)=4$. **Д2.3.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=16$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=0{,}5$. **Д2.4.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=\sqrt[3]{4}$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=-1$. **Д2.5.** $\max\limits_{[1;7]} y(x)=1+\log_2 3$; $\min\limits_{[1;7]} y(x)=1$. **Д2.6.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y(x)=9$; $\min\limits_{\mathbb{R}} y(x)=\frac{1}{9}$. **Д2.7.** 14. **Д2.8.** 20. **Д2.9.** 4. **Д2.10.** 16. **Д2.11.** 2. **Д2.12.** 7.

§ 3. Первообразная

Диагностическая работа

1. $F(x)=0{,}3x^2+0{,}4x-1{,}4$; $F(1)=-0{,}7$. **2.** 18. **3.** $F(x)=3x-\frac{1}{x^2}$; $F(0{,}5)=-2{,}5$. **4.** -1. **5.** $F(x)=2x+22\sqrt{x}-67$; $F(9)=17$. **6.** $F(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$; $F(8)=2$. **7.** -6. **8.** $F(x)=2x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{4}$; $F\left(\frac{7\pi}{4}\right)=0$. **9.** $F(x)=e^x+2x^2+3x-5$; $F(0)=-4$. **10.** -5. **11.** 22. **12.** 2.

Тренировочная работа 1

Т1.1. $F(x)=x^2+1{,}5x-11{,}5$; $F(0)=-11{,}5$. **Т1.2.** $F(x)=x^4+x^3+10$; $F(-1)=10$. **Т1.3.** $F(x)=x^4-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}$; $F(1)=0$. **Т1.4.** 3,4. **Т1.5.** 2,5. **Т1.6.** $F(x)=2x^2+2x-3{,}5$; $F(-2)=0{,}5$. **Т1.7.** 4. **Т1.8.** -7. **Т1.9.** -4. **Т1.10.** 154.

Тренировочная работа 2

Т2.1. $F(x)=3\ln x+1$; $F(1)=1$. **Т2.2.** $F(x)=4\ln(-x)-2$; $F(-1)=-2$. **Т2.3.** $F(x)=4\ln(x-5)+4$; $F(6)=4$. **Т2.4.** $F(x)=3\ln(4-x)+9$; $F(3)=9$. **Т2.5.** $F(x)=2\ln(4x+3)-5$; $F(-0{,}5)=-5$. **Т2.6.** $F(x)=-\frac{3}{2x}+8$; $F(3)=7{,}5$. **Т2.7.** $F(x)=4x+\frac{3}{x}-24$; $F(0{,}5)=-16$. **Т2.8.** 5. **Т2.9.** 4. **Т2.10.** $F(x)=x+\frac{1}{100x}-0{,}01$; $F(0{,}5)=0{,}51$.

Тренировочная работа 3

Т3.1. $F(x)=4x\sqrt{x}+5\sqrt{x}$; $F(4)=52$. **Т3.2.** $F(x)=x+4\sqrt{x}+1$; $F(1)=6$. **Т3.3.** $F(x)=4x-22\sqrt{x}+22$; $F(4)=-6$. **Т3.4.** $F(x)=3x\sqrt[3]{x}+5x+6$; $F(-1)=4$. **Т3.5.** $F(x)=15x\sqrt[15]{x^8}+12$; $F(1)=27$. **Т3.6.** $F(x)=2x\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x}+5x+4$; $F(1)=14$. **Т3.7.** $F(x)=5x^4\sqrt[5]{x}+16$; $F(-1)=11$. **Т3.8.** -43. **Т3.9.** 1. **Т3.10.** $F(x)=9x^2\sqrt[3]{x}-19$; $F(1)=-10$.

Тренировочная работа 4

Т4.1. $F(x)=2\sin x-3$; $F(\pi)=-3$. **Т4.2.** $F(x)=3\cos x+10$; $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=10$. **Т4.3.** $F(x)=-2\sin 4x+25$; $F\left(\frac{\pi}{8}\right)=23$. **Т4.4.** $F(x)=-2\cos 3x+10$; $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=12$. **Т4.5.** 3. **Т4.6.** $F(x)=3x-\sin 2x-\frac{3\pi}{4}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$. **Т4.7.** 7. **Т4.8.** 6. **Т4.9.** 2. **Т4.10.** 0.

Тренировочная работа 5

Т5.1. $F(x)=e^x+1$; $F(0)=2$. **Т5.2.** $F(x)=2e^x-3x+13$; $F(0)=15$. **Т5.3.** $F(x)=3e^{2x}+4$; $F(0)=7$. **Т5.4.** $F(x)=5e^x+6x+2$; $F(0)=7$. **Т5.5.** $F(x)=2^x+3$; $F(3)=11$. **Т5.6.** $F(x)=2^x-3$; $F(1)=-1$. **Т5.7.** -14. **Т5.8.** 30. **Т5.9.** 1. **Т5.10.** -2.

Тренировочная работа 6

Т6.1. 26. **Т6.2.** 1. **Т6.3.** 2. **Т6.4.** 9. **Т6.5.** 24. **Т6.6.** 3. **Т6.7.** 45. **Т6.8.** 6. **Т6.9.** 5. **Т6.10.** 1,5.

Диагностическая работа 1

Д1.1. $F(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $F(-1) = 0$. **Д1.2.** 27. **Д1.3.** $F(x) = 2x - \frac{1}{x} + 2$; $F(0{,}5) = 1$. **Д1.4.** -2. **Д1.5.** $F(x) = 4x + 6\sqrt{x} + 1$; $F(4) = 29$. **Д1.6.** $F(x) = 3x\sqrt[3]{x} - 4$; $F(-8) = 44$. **Д1.7.** 3. **Д1.8.** $F(x) = 4x + \cos 3x - \frac{4\pi}{9}$; $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0{,}5$. **Д1.9.** $F(x) = 6e^x + 4x + 1$; $F(0) = 7$. **Д1.10.** 28 **Д1.11.** 6. **Д1.12.** 5.

Диагностическая работа 2

Д2.1. $F(x) = x + x^2 + x^3 + x^{13} + 1$; $F(-1) = -1$. **Д2.2.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 3$; $F(3) = 0$. **Д2.3.** $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 3$; $F(0{,}5) = 1$. **Д2.4.** $F(x) = -\frac{1}{x} + 9$; $F(1) = 8$. **Д2.5.** $F(x) = 4\sqrt{x} + x^{\frac{5}{4}} + 2$; $F(1) = 7$. **Д2.6.** $F(x) = 0{,}75x\sqrt[3]{x} + 0{,}25$; $F(1) = 1$. **Д2.7.** $F(x) = -0{,}25\cos 2x + 1$; $F(\pi) = 0{,}75$. **Д2.8.** $F(x) = 0{,}5\sin 2x + 1$; $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$. **Д2.9.** $F(x) = 30^x + 100$; $F(1) = 130$. **Д2.10.** $F(x) = 72 \cdot 6^x + 1$; $F(-1) = 13$. **Д2.11.** -1. **Д2.12.** 3,5.

Содержание

Учебно-методическое пособие

Сергей Алексеевич Шестаков

ЕГЭ 2019. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций.
Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано в печать 07.08.2018 г. Формат 70×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7. Тираж 3000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат».
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.