8

13

16

Под редакцией
И. В. Ященко

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2019

13, 16
Базовый

8
Профильный

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2019. Математика
Задачи по стереометрии

Задача 8 (профильный уровень)
Задачи 13 и 16 (базовый уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2019. Математика. Задачи по стереометрии. Задача 8 (профильный уровень). Задачи 13 и 16 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019. — 96 с.

ISBN 978-5-4439-1318-6

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2019. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2019 году по базовому и профильному уровням.

Настоящее пособие предназначено для подготовки к решению стереометрических задач первой части ЕГЭ по математике. Оно состоит из трёх частей: «Многогранники. Призмы», «Многогранники. Пирамиды» и «Тела вращения», каждая из которых открывается начальной диагностической работой и включает в себя несколько тематических модулей, а также тренировочные работы к каждому из таких модулей. Помимо тренировочных работ в каждом модуле приводятся необходимые теоретические сведения и краткие методические рекомендации с разбором типовых примеров. Завершают пособие итоговые диагностические работы, в которые включены задачи по всем темам каждой из частей. Все тренировочные и диагностические работы даются в двух вариантах.

Тетрадь предназначена для учащихся средней школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

12+

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 07.08.2018 г. Формат 70 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 6. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

arvato BERTELSMANN

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат».
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

ISBN 978-5-4439-1318-6

От редактора серии

Прежде чем вы начнёте работать с тетрадями, дадим некоторые пояснения и советы.

Планируется, что в 2019 году у вас будет возможность выбрать уровень экзамена по математике — базовый или профильный. Вариант базового уровня будет состоять из 20 задач, проверяющих освоение Федерального государственного образовательного стандарта на базовом уровне.

Вариант ЕГЭ профильного уровня состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня сложности по основным темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9—12) и семь с развёрнутым ответом (задания 13—19).

Рабочие тетради организованы в соответствии со структурой экзамена и позволят вам подготовиться к выполнению всех заданий с кратким ответом, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Профильный уровень предназначен в первую очередь для тех, кому математика требуется при поступлении в вуз. Если вы ориентируетесь на этот уровень, то понимаете, что нужно уметь решать все задания с кратким ответом — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдёт меньше времени, чем на задание с развёрнутым решением; обидно терять баллы из-за ошибок в относительно простых задачах.

Кроме того, тренировка на простых задачах позволит вам избежать технических ошибок и при решении задач с полным решением.

Работу с каждой частью тетради следует начать с выполнения диагностической работы. Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с решениями, приведёнными в книге. Если какая-то задача или тема вызывает затруднения, следует после повторения материала выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, размещённые в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей для подготовки к ЕГЭ по математике позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического изучения математики.

Желаем успеха!

Предисловие

Задачи по стереометрии встречаются в вариантах ЕГЭ по математике и среди заданий с кратким ответом, и среди заданий с развёрнутым ответом (полным решением).

Задания с кратким ответом можно условно разделить на две группы: первая — вполне традиционные несложные задачи на вычисление углов, расстояний, площадей поверхностей и объёмов, вторая — задачи, которые в определённой степени можно считать заданиями с практическим содержанием. В последних обычно требуется ответить на вопросы, связанные с изменением площади, объёма или массы тела при изменении его линейных размеров (например, ответить на вопрос о массе шарика, сделанного из того же материала, что и шарик вдвое меньшего радиуса, если масса меньшего шарика известна), найти площадь поверхности или объём невыпуклого многогранника, все двугранные углы которого прямые (например, многогранника, напоминающего пьедестал почёта).

Для того чтобы справиться с задачами каждой из указанных групп, нужно уметь решать стандартные задачи на правильные пирамиды и призмы, тела вращения и некоторые несложные задачи на произвольные пирамиды или наклонные призмы, в сущности проверяющие владение основными понятиями, определениями и теоремами.

Это пособие предназначено для подготовки к решению стереометрических задач первой части ЕГЭ по математике, в том числе для экспресс-повторения соответствующих тем. Оно состоит из трёх частей: «Многогранники. Призмы», «Многогранники. Пирамиды» и «Тела вращения», каждая из которых открывается начальной диагностической работой и включает в себя несколько тематических модулей, а также тренировочные работы к каждому из таких модулей. Помимо тренировочных работ в каждом модуле приводятся необходимые теоретические сведения и краткие методические рекомендации с разбором типовых примеров. Завершают пособие итоговые диагностические работы, в которые включены задачи по всем темам каждой из частей. Все тренировочные и диагностические работы даются в двух вариантах.

Помимо подготовки к решению стереометрической задачи с кратким ответом пособие может оказаться полезным и для подготовки к решению более сложных стереометрических задач с развёрнутым решением, которые включаются во вторую часть ЕГЭ по математике: часть задач пособия связана с вычислениями углов и расстояний в пространстве и предназначена для пропедевтики такой подготовки.

Пособие адресовано учащимся старшей школы, учителям, методистам, всем заинтересованным участникам образовательного процесса.

Автор выражает признательность О. А. Васильевой за внимательное и вдумчивое чтение рукописи, замечания и предложения, в немалой степени способствовавшие улучшению книги.

Часть I. Многогранники. Призмы

Диагностическая работа 1

Вариант 1

1. Боковые рёбра призмы образуют с плоскостью основания углы в 30° и равны 6. Найдите высоту призмы.

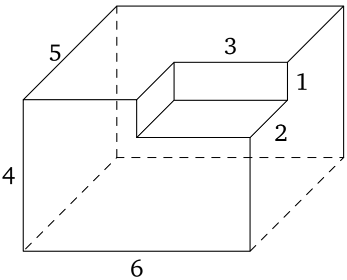
2. Ребро B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярно плоскости грани AA_1CC_1 и равно 18, точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите расстояние от точки E до плоскости грани AA_1CC_1.

3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $7\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости A_1DC.

4. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 12$. Найдите угол между плоскостями ADB и AD_1B_1, если боковое ребро параллелепипеда равно $6\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

5. Найдите площадь полной поверхности прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $A_1C_1 = 8$, $B_1D_1 = 6$, $A_1A = 7$, а верхним основанием является ромб $A_1B_1C_1D_1$.

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все его двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = 1$, $AD_1 = \sqrt{10}$, $BD_1 = \sqrt{14}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

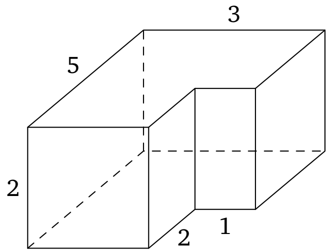
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

8

8. На рисунке изображена прямая призма. Найдите её объём, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Боковые рёбра призмы образуют с плоскостью основания углы в 60° и равны $4\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы.

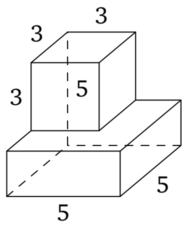
2. Ребро B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярно плоскости грани AA_1C_1C и равно 22, точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите расстояние от точки E до плоскости грани AA_1C_1C.

3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $8\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины C до плоскости D_1AB.

4. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 18$. Найдите угол между плоскостями BCD и CD_1B_1, если боковое ребро параллелепипеда равно $3\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

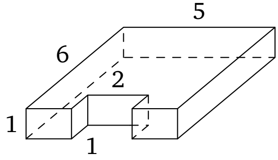
5. Найдите площадь полной поверхности прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AC = 24$, $BD = 10$, $A_1A = 2$, а основанием является ромб $ABCD$.

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все его двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $BC = 3$, $BC_1 = 5$, $AC_1 = \sqrt{29}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

8. На рисунке изображена прямая призма. Найдите её объём, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

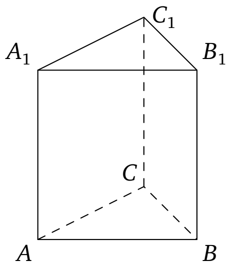
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

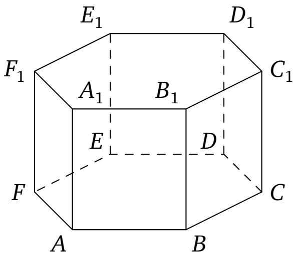
1. Призма, её элементы. Прямая призма. Правильная треугольная призма

Большинство задач на призмы, которые можно встретить в вариантах ЕГЭ по математике, связано с прямыми призмами и, в частности, с правильными призмами.

Напомним, что все боковые рёбра прямой призмы перпендикулярны плоскости её основания. Прямая призма называется правильной, если в её основании лежит правильный многоугольник. Наиболее распространённые виды правильных призм — треугольные (основание — равносторонний треугольник), четырёхугольные (основание — квадрат), шестиугольные (основание — правильный шестиугольник).

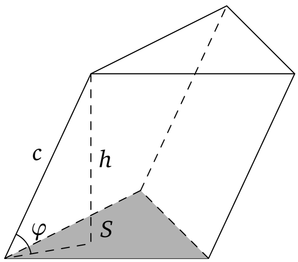


прямая треугольная призма



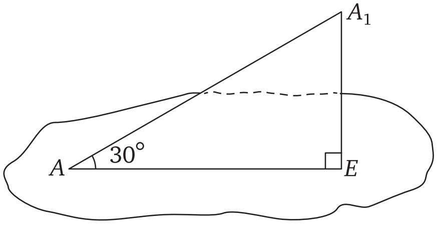
прямая шестиугольная призма

Боковые рёбра наклонной призмы образуют с плоскостью основания равные углы, отличные от прямых. Поэтому чтобы найти, например, высоту такой призмы, нужно умножить длину её бокового ребра на синус угла между боковым ребром и плоскостью основания.



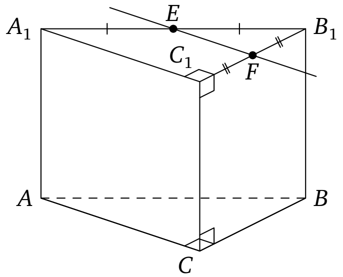
Пример 1 (решение задачи 1 варианта 1 диагностической работы 1). Боковые рёбра призмы образуют с плоскостью основания углы в 30° и равны 6. Найдите высоту призмы.

Решение. В условии задачи даже не сказано, какой многоугольник лежит в основании призмы, поскольку для решения задачи это несущественно. Опустим из любой вершины верхнего основания (назовём её A_1, а соответствующую вершину нижнего основания обозначим буквой A) этой призмы перпендикуляр A_1E на плоскость нижнего основания. Это и будет высота призмы. Её длина равна 3, как длина катета, противолежащего углу в $30°$ в прямоугольном треугольнике с гипотенузой 6.



Ответ. 3.

Пример 2 (решение задачи 2 варианта 1 диагностической работы 1). Ребро B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярно плоскости грани AA_1C_1C и равно 18, точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите расстояние от точки E до плоскости грани AA_1C_1C.



Решение. Проведём через точку E прямую, параллельную прямой A_1C_1 (а значит, и всей плоскости грани AA_1C_1C), и обозначим через F точку пересечения этой прямой с ребром B_1C_1. Расстояние от любой точки этой прямой до параллельной ей плоскости будет одним и тем же. Оно равно длине отрезка $FC_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 = 9$.

Ответ. 9.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 1

Вариант 1

1. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, основаниями которой являются правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если высота призмы равна 3, а боковое ребро равно 10.

2. Дана наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если боковое ребро равно $2\sqrt{5}$, а высота призмы равна 2.

3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите угол ACA_1, если боковое ребро BB_1 равно 10, а высота одного из оснований равна 15. Ответ дайте в градусах.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра BC. Найдите косинус угла AMA_1, если боковое ребро CC_1 равно 4, а сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

5. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой H_1 — основание высоты C_1H_1 прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ с гипотенузой A_1B_1. Найдите тангенс угла C_1CH_1, если боковое ребро CC_1 равно 24, а катеты треугольника равны 7 и 24.

6. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC = \sqrt{79}$. Найдите угол между плоскостями ABC и CA_1B_1, если боковое ребро AA_1 равно 5, а сторона основания AB равна 4. Ответ дайте в градусах.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ боковые рёбра равны 10, а рёбра основания равны 5. Найдите угол BE_1E. Ответ дайте в градусах.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол AC_1A_1. Ответ дайте в градусах.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ рёбра основания равны 1, а боковые рёбра равны $\sqrt{11}$. Найдите тангенс угла A_1DC_1.

10. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 45°$. Найдите угол между плоскостями BAA_1 и CAA_1, если в основании призмы лежит правильный треугольник ABC. Ответ дайте в градусах.

Ответы:

Вариант 2

1. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, основаниями которой являются правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если высота призмы равна 6, а боковое ребро равно 8.

1

2. Дана наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания, если боковое ребро равно $\sqrt{26}$, а высота призмы равна 5.

2

3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите угол AB_1A_1, если боковое ребро AA_1 равно 6, а высота одного из оснований равна $3\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

3

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M_1 — середина ребра B_1C_1. Найдите косинус угла AM_1A_1, если боковое ребро BB_1 равно $2\sqrt{7}$, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$.

4

5. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой H_1 — основание высоты C_1H_1 прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ с гипотенузой A_1B_1. Найдите тангенс угла C_1CH_1, если боковое ребро AA_1 равно $\frac{10}{13}$, а катеты треугольника $A_1B_1C_1$ равны 5 и 12.

5

6. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC = \sqrt{10}$. Найдите угол между плоскостью CA_1B_1 и плоскостью основания, если боковое ребро AA_1 равно 3, а сторона основания AB равна 2. Ответ дайте в градусах.

6

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 3. Найдите тангенс угла DAD_1.

7

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 2. Найдите угол BF_1F. Ответ дайте в градусах.

8

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ рёбра основания равны 3, а боковые рёбра равны $\sqrt{3}$. Найдите тангенс угла B_1ED_1.

9

10. Дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$. Найдите угол между плоскостями BAA_1 и CAA_1, если в основании призмы лежит правильный треугольник ABC. В ответе укажите косинус этого угла, умноженный на 3.

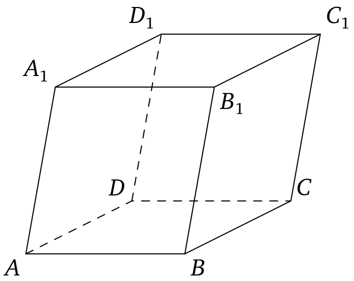
10

Образец написания:

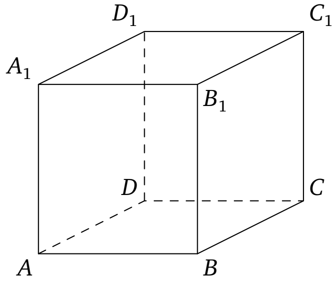
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

2. Параллелепипед, его элементы. Прямоугольный параллелепипед. Куб

Напомним, что параллелепипедами называют четырёхугольные призмы с параллелограммом в основании. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. Прямой параллелепипед с прямоугольником в основании называется прямоугольным параллелепипедом. Прямоугольный параллелепипед, все грани которого — квадраты (т. е. все рёбра которого равны), называется кубом.



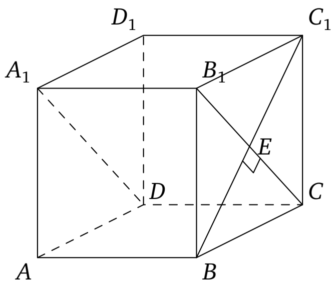
наклонный параллелепипед



куб

Пример 3 (решение задачи 3 варианта 1 диагностической работы 1). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $7\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости A_1DC.

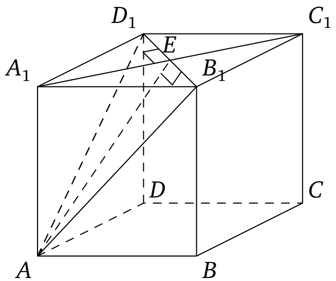
Решение. Поскольку две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым, плоскость A_1DC пересекает верхнее основание куба по прямой A_1B_1 и прямоугольник A_1B_1CD является сечением куба этой плоскостью. Для решения задачи строить сечение, как мы увидим, совершенно не обязательно, это сделано для большей наглядности. Обозначим точку пересечения диагоналей грани BCC_1B_1 буквой E. Поскольку диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, отрезок BE, равный



половине диагонали квадрата со стороной $7\sqrt{2}$, и будет искомым перпендикуляром. Действительно, в силу последнего замечания $BE \perp B_1C$. Кроме того, $BE \perp DC$, так как DC является перпендикуляром к плоскости грани BCC_1B_1 и, значит, прямая DC перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Таким образом, прямая BE перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости A_1DC и, следовательно, перпендикулярна этой плоскости. Итак,

$$BE = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7.$$

Пример 4 (решение задачи 4 варианта 1 диагностической работы 1). Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 12$. Найдите угол между плоскостями ADB и AD_1B_1, если боковое ребро параллелепипеда равно $6\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.



Решение. Поскольку плоскости нижнего и верхнего оснований параллелепипеда параллельны, искомый угол будет равен углу между плоскостью AD_1B_1 и плоскостью $A_1D_1B_1$ верхнего основания. Эти плоскости пересекаются по прямой D_1B_1. Пусть E — точка пересечения диагоналей ромба $A_1B_1C_1D_1$. Тогда $A_1E \perp D_1B_1$ и $A_1E = \frac{1}{2}A_1C_1 = 6$. Заметим, что $AB_1 = AD_1$ (как гипотенузы равных прямоугольных треугольников AB_1B и AD_1D). Поэтому медиана AE равнобедренного треугольника AD_1B_1 является его высотой, а угол AEA_1 — линейным углом искомого двугранного угла. Но

$$\operatorname{tg}\angle AEA_1 = \frac{AA_1}{A_1E} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}.$$

Значит, $\angle AEA_1 = 60°$.

Ответ. 60.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

Тренировочная работа 2

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 равна 10, а боковое ребро BB_1 равно $\sqrt{19}$. Найдите синус угла BD_1D.

2. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, у которого $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$. Ответ дайте в градусах.

3. Найдите угол DBD_1 прямоугольного параллелепипеда, у которого $AB=5$, $AD=12$, $AA_1=13$. Ответ дайте в градусах.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB=8$, $AD=11$, $AA_1=6$. Найдите синус угла между прямыми AB_1 и CD_1.

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$, $AB=24$, $BC=7$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой CC_1, если высота параллелепипеда равна 40, а боковое ребро равно 50.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и A_1C_1. Ответ дайте в градусах.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостью ADA_1 и плоскостью, проходящей через середины рёбер AD, A_1D_1 и CC_1.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N являются серединами сторон BC и A_1B_1. Найдите косинус угла MC_1N.

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $\sqrt{24}$. Найдите расстояние от точки D до прямой A_1C_1.

10. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно $\sqrt{10}$, а стороны основания равны 8. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и середину ребра AB.

Ответы:

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ BD_1 равна 15, а боковое ребро CC_1 равно $6\sqrt{6}$. Найдите косинус угла ACA_1.

1

2. Найдите угол CD_1B прямоугольного параллелепипеда, у которого $AB=3$, $AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

2

3. Найдите угол AC_1A_1 прямоугольного параллелепипеда, у которого $AB=1$, $AD=\sqrt{2}$, $AA_1=1$. Ответ дайте в градусах.

3

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB=7$, $AD=3$, $AA_1=6$. Найдите синус угла между прямыми CB_1 и AD_1.

4

5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$, $AB=45$, $BC=24$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой CC_1, если высота параллелепипеда равна 20, а боковое ребро равно 34.

5

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BD. Ответ дайте в градусах.

6

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку A_1 и середины рёбер BB_1 и CC_1.

7

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, L, M и N являются серединами сторон BC, CC_1, A_1D_1 и C_1D_1. Найдите угол между прямыми KL и MN. Ответ дайте в градусах.

8

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой BA_1.

9

10. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$, а стороны основания равны 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра B_1C_1.

10

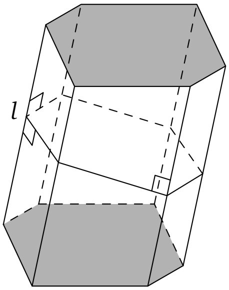
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3. Площадь поверхности призмы

Площадь полной поверхности призмы складывается из суммы $2S_{\text{осн}}$ площадей её оснований и площади $S_{\text{бок}}$ её боковой поверхности:

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

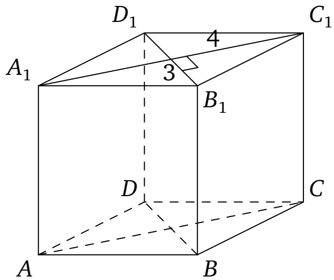


Площадь боковой поверхности призмы можно найти как произведение её бокового ребра l на периметр P сечения призмы плоскостью, перпендикулярной её боковому ребру:

$$S_{\text{бок}} = l \cdot P.$$

Для прямой призмы любое такое сечение будет многоугольником, равным многоугольнику, являющемуся основанием призмы, а боковое ребро будет равно высоте призмы. Поэтому площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания на высоту.

Пример 5 (решение задачи 5 варианта 1 диагностической работы 1). Найдите площадь полной поверхности прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $A_1C_1 = 8$, $B_1D_1 = 6$, $A_1A = 7$, а верхним основанием является ромб $A_1B_1C_1D_1$.



Решение. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. В данном случае она будет равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, а сумма площадей оснований — вдвое больше, т. е. 48. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы. Высота призмы дана в условии и равна 7. Для того чтобы найти периметр основания призмы, достаточно найти сторону ромба, являющегося этим основанием. Поскольку диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, сторону ромба можно найти по теореме Пифагора как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4. Эта гипотенуза будет равна 5, а периметр ромба — в четыре раза больше, т. е. 20. Поэтому площадь боковой поверхности ромба равна $20 \cdot 7 = 140$, а площадь полной поверхности равна $48 + 140 = 188$.

Ответ. 188.

Тренировочная работа 3

Ответы:

Вариант 1

1. Площадь полной поверхности призмы на 24 см^2 больше площади её боковой поверхности. Найдите площадь основания призмы. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

1

2. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 1, 4 и 6. Найдите площадь его поверхности.

2

3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 6. Диагональ параллелепипеда равна 9. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

3

4. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.

4

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Площадь четырёхугольника ABC_1D_1 равна $9\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности куба.

5

6. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 3 и 4, а боковое ребро равно 5.

6

7. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 8, а высота равна 5.

7

8. Найдите площадь боковой поверхности прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12, если высота призмы равна 10.

8

9. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота равна 10.

9

10. Основанием наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$, а диагональ AC_1 призмы перпендикулярна плоскости основания. Найдите площадь основания призмы, если $AC_1 = 2\sqrt{7}$, $AA_1 = 6$.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Площадь боковой поверхности призмы на 36 см^2 меньше площади её полной поверхности. Найдите площадь основания призмы. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

2. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 5. Найдите площадь его поверхности.

3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Диагональ параллелепипеда равна 11. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

4. Диагональ куба равна 4. Найдите площадь его поверхности.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Площадь четырёхугольника ABC_1D_1 равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности куба.

6. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 12 и 5, а боковое ребро равно 11.

7. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 3, а высота равна 2.

8. Найдите площадь боковой поверхности прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетом 5 и гипотенузой 13, если высота призмы равна 2.

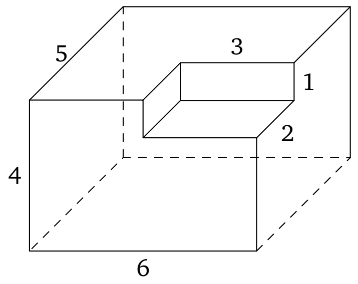
9. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 3, а высота равна 2.

10. Основанием наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$, а диагональ A_1C призмы перпендикулярна плоскости основания. Найдите площадь основания призмы, если $A_1C = 3\sqrt{23}$, $AA_1 = 15$.

4. Произвольные многогранники, площади их поверхностей

Эта часть пособия посвящена задачам, которых довольно много в открытом банке заданий с кратким ответом ЕГЭ по математике. В этих задачах рассматриваются невыпуклые многогранники, все двугранные углы которых являются прямыми и которые можно получить, вырезав из прямой призмы другую прямую призму (или несколько таких призм), либо составить их из нескольких прямых призм. Основная идея решения таких задач — мысленное достраивание данного многогранника до исходной прямой призмы. Если такое достраивание является затруднительным, можно просто посчитать площадь поверхности такого многогранника как сумму площадей многоугольников, являющихся его гранями.

Пример 6 (решение задачи 6 варианта 1 диагностической работы 1). Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все его двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Решение. Как отмечалось выше, можно посчитать площади всех граней многогранника и сложить их. Можно несколько оптимизировать вычисления, заметив, что данный многогранник получается, если из прямоугольного параллелепипеда с измерениями 6, 5 и 4 вырезать прямоугольный параллелепипед с измерениями 3, 2, 1. Тогда площадь нижнего основания полученного «выреза» равна площади, на которую уменьшилась площадь верхнего основания исходного параллелепипеда, а площади левой и задней стенок выреза равны соответственно площадям, на которые уменьшились площади правой и передней граней исходного параллелепипеда. Таким образом, площадь поверхности полученного многогранника будет в точности той же, что и площадь S полной поверхности исходного параллелепипеда, которая равна удвоенной сумме площадей его различных граней: $S = 2(6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6) = 148$.

Ответ. 148.

Заметим ещё, что во всех таких задачах числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер, и далее для экономии места оговаривать это не будем.

Ответы:

1

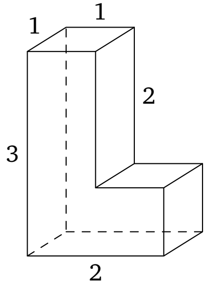
2

3

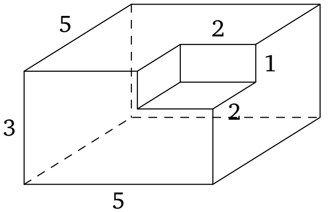
Тренировочная работа 4

Вариант 1

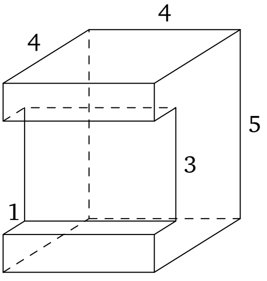
1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

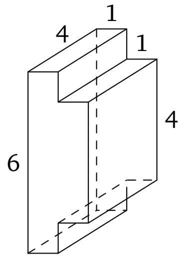


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

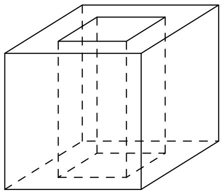
Ответы:

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



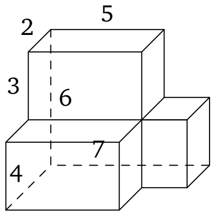
4

5. Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности получившегося после вырезания многогранника.



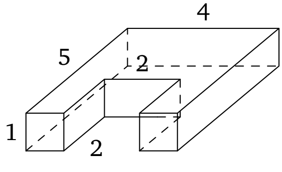
5

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



6

7. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые.



7

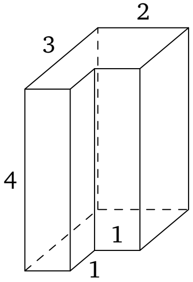
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

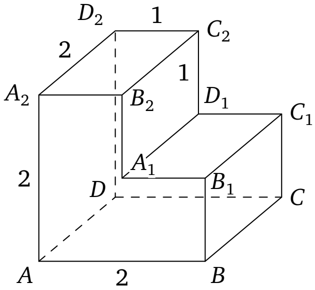
8

8. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые.



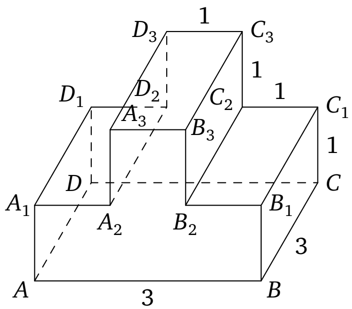
9

9. Найдите расстояние между вершинами A и C_2 изображённого на рисунке многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые.



10

10. Найдите квадрат расстояния между вершинами B_1 и D_3 изображённого на рисунке многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые.



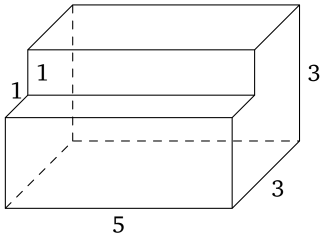
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

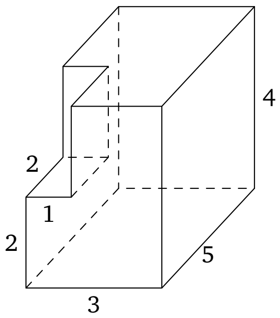
Вариант 2

1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



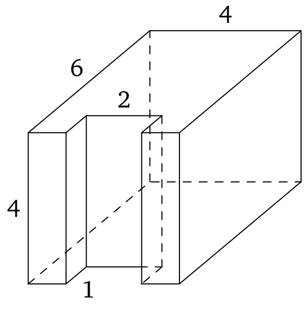
1

2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



2

3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



3

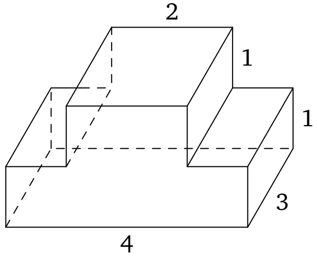
Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

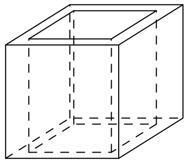
4

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



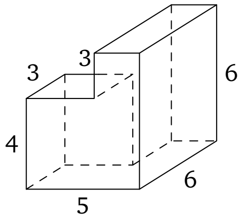
5

5. Из куба с ребром 3 вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 2,5 и боковым ребром 3. Найдите площадь поверхности получившегося после вырезания многогранника.



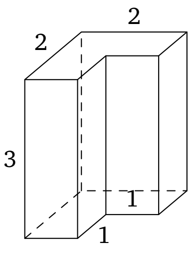
6

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



7

7. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые.

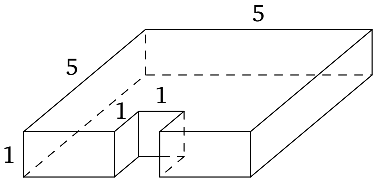


Образец написания:

1234567890–,

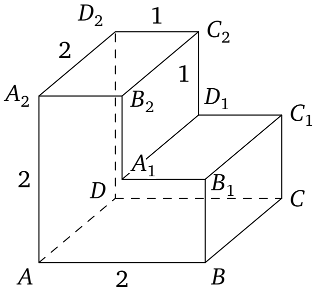
Ответы:

8. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые.



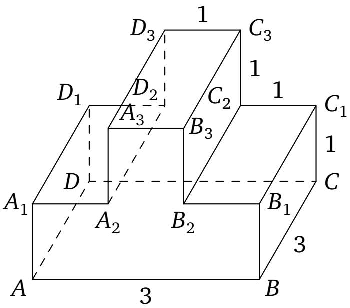
8

9. Найдите расстояние между вершинами B_1 и D_2 изображённого на рисунке многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые.



9

10. Найдите квадрат расстояния между вершинами B и D_2 изображённого на рисунке многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые.



10

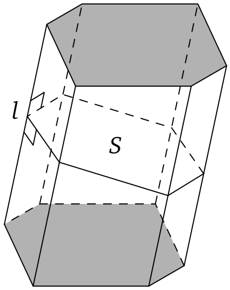
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

5. Объём призмы

Объём призмы равен произведению площади основания призмы на её высоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

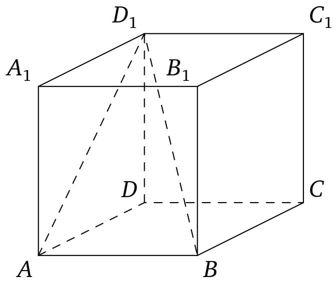


Высота прямой призмы совпадает с её боковым ребром, поэтому для прямых призм находить объём проще, чем для наклонных. Высота наклонной призмы равна произведению бокового ребра на синус угла между боковым ребром и плоскостью основания призмы.

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений, объём куба равен кубу его ребра.

Если боковое ребро наклонной призмы равно l, а сечением призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является многоугольник площади S, то объём призмы можно также вычислить по формуле $V = S \cdot l$.

Пример 7 (решение задачи 7 варианта 1 диагностической работы 1). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = 1$, $AD_1 = \sqrt{10}$, $BD_1 = \sqrt{14}$. Найдите объём этого параллелепипеда.

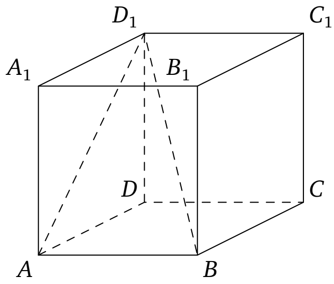


Решение. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений. Поскольку $AD = 1$, найдём $AA_1 = DD_1$ и AB. Из теоремы Пифагора для треугольника ADD_1 получим, что

$$DD_1 = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3.$$

Так как AB является перпендикуляром к плоскости грани AA_1D_1D, получаем, что $AB \perp AD_1$. Поэтому треугольник ABD_1 прямоугольный и из теоремы Пифагора для него находим $AB = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2$. Следовательно, объём параллелепипеда равен $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример 8 (решение задачи 6 варианта 1 диагностической работы 1). На рисунке изображена прямая призма. Найдите её объём, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Решение. Искомый объём V можно найти как разность объёмов прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3, 5 и 2 и прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2, 1, 2: $V = 3 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 26$.

Ответ. 26.

Тренировочная работа 5

Вариант 1

1. Основанием параллелепипеда является ромб со стороной 10 и острым углом 45°. Одно из боковых рёбер параллелепипеда составляет с плоскостью этого основания угол 30° и равно $2\sqrt{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

2. Найдите объём призмы, если в её основании лежит четырёхугольник, площадь которого равна 5, а боковые рёбра равны $4\sqrt{2}$ и наклонены к плоскости основания под углом 45°.

3. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 4, а боковые рёбра равны $4\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30°.

4. Найдите объём правильной треугольной призмы, если сторона основания равна 2, а боковые рёбра равны $\sqrt{3}$.

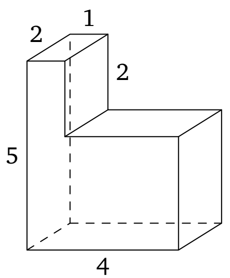
5. Диагональ куба равна $\sqrt{27}$. Найдите его объём.

6. Найдите объём прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6, если высота призмы равна 9.

7. Площадь поверхности куба равна 150. Найдите его объём.

8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 13. Найдите объём призмы, если её высота равна 12.

9. На рисунке изображена прямая призма. Найдите её объём, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

10

10. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 24 см до отметки 26 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в см^3.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Основанием параллелепипеда является ромб со стороной 3 и острым углом 30°. Одно из боковых рёбер параллелепипеда составляет с плоскостью этого основания угол 45° и равно $\sqrt{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

2. Найдите объём призмы, если в её основании лежит пятиугольник, площадь которого равна 8, а боковые рёбра равны $3\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 60°.

3. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые рёбра равны 6 и наклонены к плоскости основания под углом 60°.

4. Найдите объём правильной треугольной призмы, если сторона основания равна 6, а боковые рёбра равны $2\sqrt{3}$.

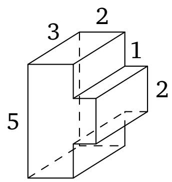
5. Диагональ куба равна $\sqrt{48}$. Найдите его объём.

6. Найдите объём прямой треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетом 7 и гипотенузой 25, если высота призмы равна 2.

7. Площадь поверхности куба равна 54. Найдите его объём.

8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 17. Найдите объём призмы, если её высота равна 8.

9. На рисунке изображена прямая призма. Найдите её объём, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



10. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2400 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в см^3.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Часть II. Многогранники. Пирамиды

Диагностическая работа 2

Вариант 1

1

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а боковое ребро равно 6. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

2

2. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{7}$, а боковое ребро равно 7. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

3

3. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

4

4. Плоскости двух несмежных боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а апофема равна $4\sqrt{2}$. Найдите сторону основания.

5

5. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а сторона основания равна $2\sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

6

6. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60°, высота пирамиды равна $3\sqrt{5}$. Найдите апофему пирамиды.

7

7. Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если длина стороны её основания равна $3\sqrt{2}$.

8

8. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{11}$.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 4. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

2. Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{13}$, а боковое ребро равно 13. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

3. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 14, а высота пирамиды равна $7\sqrt{2}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

4. Плоскости двух несмежных боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а апофема равна $3\sqrt{2}$. Найдите сторону основания.

5. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а сторона основания равна 2. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

6. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°, высота пирамиды равна $2\sqrt{7}$. Найдите апофему пирамиды.

7. Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если длина стороны её основания равна $5\sqrt{2}$.

8. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

6. Пирамида, её элементы. Правильная треугольная пирамида

Напомним основные факты, связанные с правильной треугольной пирамидой:

— основанием правильной треугольной пирамиды является правильный (равносторонний) треугольник;

— каждая медиана этого правильного треугольника является его биссектрисой, высотой и серединным перпендикуляром; эти медианы равны;

— все боковые рёбра правильной пирамиды равны;

— все боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками;

— высота боковой грани пирамиды, проведённая к стороне основания, называется апофемой (она также является медианой и биссектрисой боковой грани);

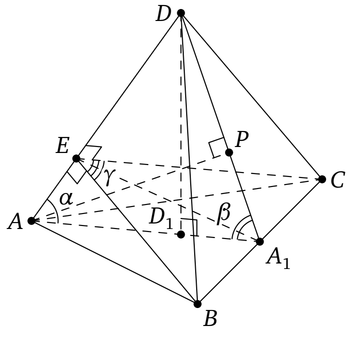
— углы между каждым из боковых рёбер правильной пирамиды и плоскостью основания равны;

— углы между плоскостью каждой из боковых граней пирамиды и плоскостью основания пирамиды равны;

— углы между плоскостями любых двух боковых граней пирамиды равны;

— основанием высоты пирамиды является точка пересечения медиан (а значит, биссектрис, высот и серединных перпендикуляров) основания, и, следовательно, эта точка делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

Частным случаем правильной треугольной пирамиды является правильный тетраэдр, все грани которого представляют собой равные правильные треугольники.



Итак, пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида с основанием ABC (см. рисунок), точка A_1 — основание апофемы пирамиды и середина отрезка BC, точка D_1 — основание высоты пирамиды (она делит отрезок AA_1 в отношении $AD_1 : D_1A_1 = 2 : 1$), отрезки BE и CE — высоты треугольников BAD и CAD соответственно, AP — высота треугольника AA_1D. Тогда $\angle DAD_1 = \angle DBD_1 = \angle DCD_1 = \alpha$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, $\angle DA_1D_1 = \beta$ — угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды, $\angle BEC = \gamma$ — угол между плоскостями боковых граней пирамиды. Пусть $b = DA = DA = BC$ — длина бокового ребра пирамиды, $h = DD_1$ — длина высоты пирамиды, $a = AB = AC = BC$ — длина стороны основания пирамиды, $m = AA_1$ — длина медианы, высоты и биссектрисы основания пирамиды, $l = DA_1$ — длина апофемы пирамиды.

Ясно, что $AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $D_1A_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Кроме того, $EA_1 = m\sin\alpha = \frac{mh}{b}$ — расстояние между скрещивающимися рёбрами пирамиды, $AP = m\sin\beta = \frac{mh}{l}$ — расстояние от вершины основания до плоскости боковой грани пирамиды.

Обратим внимание ещё и на то, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3h}{2m} = \frac{\sqrt{3}h}{a}$, а $\operatorname{tg}\beta = \frac{3h}{m} = \frac{2\sqrt{3}h}{a}$, откуда следует, что $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$. Заметим, что ортогональной проекцией треугольника DBC на плоскость ABC является треугольник D_1BC. Поэтому $\cos\beta$ можно найти как отношение площади треугольника D_1BC к площади треугольника DBC (это следует из теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника). Но $S_{DBC} = \frac{1}{3}S_{\text{бок}}$, а $S_{D_1BC} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}$ (здесь $S_{\text{бок}}$ и $S_{\text{осн}}$ — соответственно площади боковой поверхности и основания пирамиды). Таким образом, $\cos\beta = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}}$ — ещё один любопытный, но не слишком часто используемый факт.

Приведённых фактов вполне достаточно, чтобы справиться с большинством стереометрических задач ЕГЭ с кратким ответом на правильные треугольные пирамиды. При решении примеров будем использовать рисунок и введённые обозначения. В упражнения включено также несколько несложных задач на пирамиды, которые не являются правильными.

Пример 1 (решение задачи 1 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а боковое ребро равно 6. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

Решение. По условию $a = 9$, $b = 6$. Требуется найти угол α. Поскольку $\frac{AD_1}{AD} = \frac{AD_1}{b}$, достаточно найти длину отрезка AD_1. Но $AD_1 = \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}a\sin 60^\circ = \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Поэтому $\cos\alpha = \frac{a}{b\sqrt{3}} = \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\alpha = 30^\circ$.

Ответ. 30.

Пример 2 (решение задачи 2 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Апофема правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{7}$, а боковое ребро равно 7. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

Решение. По условию $l = 2\sqrt{7}$, $b = 7$. Требуется найти угол β. Поскольку $\cos\beta = \frac{A_1D_1}{A_1D} = \frac{A_1D_1}{l} = \frac{A_1D_1}{2\sqrt{7}}$, достаточно найти длину отрезка A_1D_1. Но $A_1D_1 = \frac{1}{3}m = \frac{1}{3}a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Остаётся найти $a = BC = 2A_1B$. Из теоремы Пифагора для треугольника A_1DB найдём $A_1B = \sqrt{DB^2 - A_1D^2} = \sqrt{b^2 - l^2} = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{21}$. Следовательно, $a = 2A_1B = 2\sqrt{21}$. Но тогда $A_1D_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{21}\sqrt{3}}{6} = \sqrt{7}$, и $\cos\beta = \frac{1}{2}$. Значит, $\beta = 60^\circ$.

Ответ. 60.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 6

Вариант 1

1. Высота правильной треугольной пирамиды втрое меньше стороны основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{3}$, высота равна 3. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

3. Тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 5. Найдите тангенс угла между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания.

4. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 7. Высота основания пирамиды равна 10. Найдите синус угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

5. Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 17$, $AC = 30$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 24. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

6. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $3\sqrt{6}$, высота равна 6. Найдите плоский угол при вершине пирамиды. Ответ дайте в градусах.

7. Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, если его рёбра равны $\sqrt{2}$.

8. В основании пирамиды лежит ромб, бóльшая диагональ которого равна 16. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 15. Найдите большее боковое ребро.

9. В основании пирамиды лежит параллелограмм. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей. Большее боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° и равно $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.

Ответы:

10. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы 30° и 45°. Найдите диагональ прямоугольника, если высота пирамиды равна 4.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 10, высота равна 5. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

3. Тангенс угла между плоскостью боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью её основания равен 6. Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

4. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости боковой грани, не содержащей эту вершину, равно 3,5. Высота основания пирамиды равна 5. Найдите синус угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды.

5. Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 10. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

6. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $7\sqrt{6}$, высота равна 7. Найдите плоский угол при вершине пирамиды. Ответ дайте в градусах.

7. В треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра, кроме ребра AB, равны 2. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AB и SC, если $AB = 2\sqrt{2}$.

8. В основании пирамиды лежит квадрат, одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию и равно стороне основания. Найдите высоту пирамиды, если длина наибольшего бокового ребра пирамиды равна $7\sqrt{3}$.

9. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $AB = BC = \sqrt{29}$, $SA = SC = 5$, $AC = 6$. Найдите ребро SB, если грани ABC и SAC перпендикулярны.

10. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AC равна 20, а катет AB равен 16. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 5. Найдите длину ребра SB.

7. Правильная четырёхугольная пирамида. Правильная шестиугольная пирамида

Правильная четырёхугольная пирамида

Напомним основные факты, связанные с правильной четырёхугольной пирамидой:

— основание пирамиды — квадрат;

— все боковые рёбра правильной пирамиды равны;

— все боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками;

— высота боковой грани пирамиды, проведённая к стороне основания, называется апофемой (она также является медианой и биссектрисой боковой грани);

— углы между каждым из боковых рёбер правильной пирамиды и плоскостью основания равны;

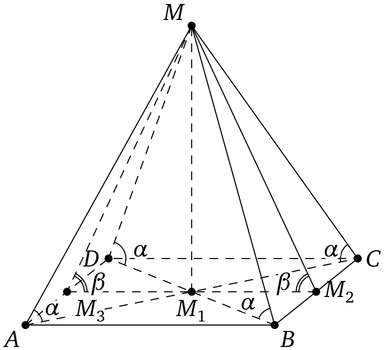


Рис. 1

— углы между плоскостью каждой из боковых граней пирамиды и плоскостью основания пирамиды равны;

— углы между плоскостями любых двух боковых граней пирамиды равны;

— основанием высоты правильной четырёхугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей квадрата, лежащего в её основании.

Итак, пусть $MABCD$ — правильная треугольная пирамида с основанием $ABCD$ (рис. 1), точка M_1 — основание высоты пирамиды (она делит пополам каждую диагональ квадрата $ABCD$), MM_2 и MM_3 — апофемы пирамиды ($M_2 \in BC$, $M_3 \in AD$). Тогда

$$\angle MAM_1 = \angle MBM_1 = \angle MCM_1 = \angle MDM_1 = \alpha$$

— угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды,

$$\angle MM_2M_1 = \angle MM_3M_1 = \beta$$

— угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Пусть $b = MA = MB = MC = MD$ — длина бокового ребра пирамиды, $h = MM_1$ — длина высоты пирамиды, $a = AB = BC = CD = AD$ — длина стороны основания пирамиды, $d = AC = BD$ — длина диагонали основания пирамиды, $l = MM_2$ — длина апофемы пирамиды.

Ясно, что $M_1M_2 = M_1M_3 = \frac{a}{2}$; $d = a\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{d} = \frac{\sqrt{2}h}{a}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt{2}h}{d} = \frac{2h}{a}$; $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

При необходимости вычисления угла между двумя смежными боковыми гранями пирамиды следует поступить стандартным образом: провести из двух противоположных вершин основания перпендикуляры к боковому ребру (например, из вершин B и D к ребру MC или ребру MA). Угол γ между этими перпендикулярами и будет искомым линейным углом двугранного угла при боковом ребре пирамиды. Находится он обычно как угол равнобедренного треугольника, боковыми сторонами которого являются проведённые высоты, а основанием — диагональ пирамиды. На рис. 2 это треугольник BED.

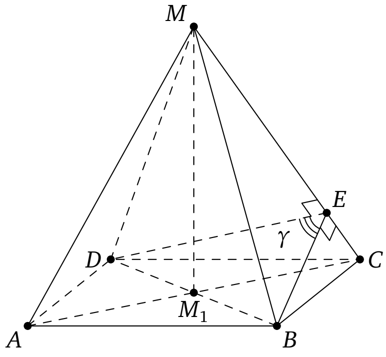


Рис. 2

Найти угол между несмежными боковыми гранями правильной четырёхугольной пирамиды (например, между плоскостями граней MAD и MBC) можно намного проще, несмотря на то что здесь нам дана только одна из точек пересечения этих плоскостей — вершина пирамиды. Для этого достаточно заметить следующее. Плоскость основания пересекает плоскости граней MAD и MBC по параллельным прямым AD и BC. Поэтому прямая пересечения плоскостей MAD и MBC также будет параллельна прямым AD и BC. Значит, прямые MM_2 и MM_3, соответственно перпендикулярные прямым BC и AD, будут перпендикулярны и параллельной им прямой пересечения плоскостей MAD и MBC. Следовательно, угол между прямыми MM_2 и MM_3, т. е. $\angle M_2MM_3$, и будет искомым линейным углом. Этот угол легко найти из треугольника MM_2M_3; очевидно, что $\angle M_2MM_3 = 180^\circ - 2\beta$.

При решении примеров будем использовать рис. 1, 2 и введённые обозначения.

Пример 3 (решение задачи 3 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

Решение. По условию $a = 6$, $h = 3\sqrt{2}$. Требуется найти b. Из теоремы Пифагора для треугольника MBM_1 получим, что $b^2 = MB^2 = MM_1^2 + M_1B^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Но $d = a\sqrt{2}$, поэтому $b^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \frac{6^2}{2} = 36$. Значит, $b = 6$.

Ответ. 6.

Пример 4 (решение задачи 4 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Плоскости двух несмежных боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а апофема равна $4\sqrt{2}$. Найдите сторону основания.

Решение. По условию $\angle M_2MM_3 = 90^\circ$, $l = 4\sqrt{2}$. Требуется найти a. В прямоугольном равнобедренном треугольнике M_2MM_3 катеты равны $4\sqrt{2}$. Поэтому

$$a = M_2M_3 = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Ответ. 8.

Правильная шестиугольная пирамида

Задачи на правильную шестиугольную пирамиду встречаются в вариантах ЕГЭ по математике реже задач на правильные треугольную и четырёхугольную пирамиды.

Обычно эти задачи связаны с вычислением углов между боковым ребром и основанием, между боковой гранью и основанием, а также некоторых расстояний.

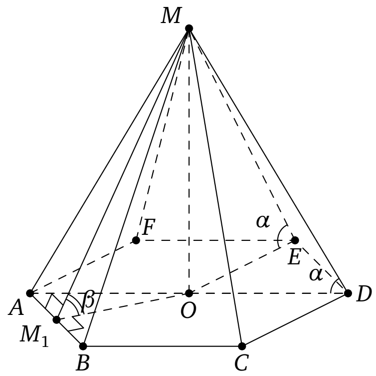


Рис. 3

Пусть $MABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида с основанием $ABCDEF$, точка O — основание высоты пирамиды (напомним, что точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, т. е. центр его вписанной и описанной окружностей и точка пересечения его диагоналей, соединяющих противоположные вершины), точка M_1 — середина стороны AB. Тогда $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \angle MDO = \angle MEO = \angle MFO = \alpha$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, $\angle MM_1O = \beta$ — угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Пусть $b = MA = MB = MC = MD = ME = MF$ — длина бокового ребра пирамиды, $h = MO$ — длина высоты пирамиды, $a = AB = BC = CD = DE = EF = FA$ — длина стороны основания пирамиды, $r = OM_1$ — радиус вписанной в основание окружности, $l = MM_1$ — апофема пирамиды. Тогда $OA = OB = OC = OD = OE = OF = a$. Кроме того, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{r} = \frac{2\sqrt{3}h}{3a}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}a$.

Пример 5 (решение задачи 5 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а сторона основания равна $2\sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

Решение. По условию $l = 6$, $a = 2\sqrt{6}$. Требуется найти $\beta = \angle MM_1O$. Из прямоугольного треугольника MM_1O находим, что $\cos\beta = \frac{M_1O}{MM_1} = \frac{r}{l} = \frac{a\sqrt{3}}{2l} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{3}}{2\cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\beta = 45^\circ$.

Ответ. 45.

Пример 6 (решение задачи 6 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60°, высота пирамиды равна $3\sqrt{5}$. Найдите апофему пирамиды.

Решение. По условию $h = 3\sqrt{5}$, $\alpha = 60^\circ$. Требуется найти l. Из треугольника OMD получим, что $b = MD = \frac{h}{\sin\alpha} = 3\sqrt{5} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{15}$, $a = OD = \frac{b}{2} = \sqrt{15}$ (как катет, лежащий против угла 30°). Теперь из теоремы Пифагора для треугольника MM_1B находим, что $MM_1^2 = MB^2 - M_1B^2$. Следовательно,

$$l^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2\sqrt{15})^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = 60 - \frac{15}{4} = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2. \quad \text{Значит, } l = 7{,}5.$$

Ответ. 7,5.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 7

Вариант 1

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны. Найдите угол между ребром основания и боковым ребром, выходящими из одной вершины. Ответ дайте в градусах.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол наклона бокового ребра к основанию. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде высота вдвое меньше бокового ребра. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{6}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно $2\sqrt{5}$. Точки M и N — середины рёбер SB и SC. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки D, M и N. Ответ дайте в градусах.

7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 2. Найдите угол SAD. Ответ дайте в градусах.

8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите угол между высотой и боковым ребром. Ответ дайте в градусах.

9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 3. Найдите угол SAC. Ответ дайте в градусах.

10. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 1, а апофема равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.

Ответы:

Вариант 2

1. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол между двумя соседними боковыми рёбрами. Ответ дайте в градусах.

1

2. В правильной четырёхугольной пирамиде диагональ основания равна боковому ребру. Найдите угол наклона бокового ребра к основанию. Ответ дайте в градусах.

2

3. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна $\sqrt{2}$, а боковые рёбра равны 2. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.

3

4. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна $\sqrt{3}$, а боковые рёбра равны 2. Найдите угол между боковыми рёбрами, не принадлежащими одной грани. Ответ дайте в градусах.

4

5. В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{5}$. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.

5

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ апофема равна стороне основания. Точка M — середина ребра SA. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки B, C и M. Ответ дайте в градусах.

6

7. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите угол SAD. Ответ дайте в градусах.

7

8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а высота равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между высотой и боковым ребром. Ответ дайте в градусах.

8

9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найдите угол SAC. Ответ дайте в градусах.

9

10. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна апофеме. Найдите угол между боковой гранью и основанием. Ответ дайте в градусах.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

8. Площадь поверхности пирамиды

Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности пирамиды складывается из площадей $S_{\text{осн}}$ её основания и $S_{\text{бок}}$ её боковой поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Приведём также формулы площадей основных плоских фигур. Именно они и используются для вычисления площади основания пирамиды и площадей её боковых граней.

Площадь треугольника

Пусть a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь. Основные формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c; \quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta; \quad S=\frac{abc}{4R};$$

$$S=pr; \quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона).}$$

В прямоугольном треугольнике один из катетов можно считать высотой, а другой — основанием. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Разумеется, все остальные формулы площади треугольника применимы и к прямоугольному треугольнику.

Площадь параллелограмма

Пусть a и b — длины двух смежных сторон параллелограмма, h_a, h_b — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, γ — угол между этими сторонами, S — площадь параллелограмма. Основные формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S=ah_a=bh_b; \quad S=ab\sin\gamma.$$

Площади прямоугольника и квадрата

Площадь S прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон a и b, т. е. $S=ab$. Площадь квадрата S равна квадрату его стороны a, т. е. $S=a^2$.

Площадь выпуклого четырёхугольника

Пусть d_1 и d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника, γ — угол между ними. Тогда площадь S этого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей четырёхугольника на синус угла между ними: $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$.

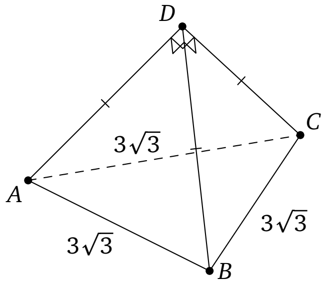
Площадь трапеции

Площадь S трапеции с основаниями a и b и высотой h равна произведению полусуммы оснований трапеции на её высоту: $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. Разумеется, для вычисления площади трапеции можно использовать и общую формулу площади выпуклого четырёхугольника.

Площадь ромба

Для вычисления площади S ромба можно использовать формулы площади параллелограмма и выпуклого четырёхугольника. Поскольку диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны, из последней следует, что площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$.

Пример 7 (решение задачи 7 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если длина стороны её основания равна $3\sqrt{2}$.



Решение. Из условия следует, что каждая боковая грань данной пирамиды является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой $3\sqrt{2}$. Тогда катеты этого треугольника равны $3\sqrt{2}\sin 45^\circ=3$, площадь одного такого треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5$, а площадь боковой поверхности втрое больше.

Ответ. 13,5.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 8

Вариант 1

1. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро равно 13.

2. Найдите площадь S полной поверхности тетраэдра, если все его рёбра равны 5. В ответе запишите $\sqrt{3}S$.

3. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь основания пирамиды, если боковое ребро равно 10.

4. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно 5.

5. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 16, а высота равна 6.

6. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а высота равна 4.

7. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

8. Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её основания равна $8\sqrt{3}$.

9. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды S. В ответе запишите $\frac{S}{\sqrt{6}}$.

10. Высота треугольной пирамиды равна 35, а высота каждой боковой грани, проведённая из вершины пирамиды, равна 37. Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 84.

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 24, а боковое ребро равно 15.

1

2. Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра S, если высота его грани равна 3. В ответе запишите $\frac{S}{\sqrt{3}}$.

2

3. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь основания пирамиды, если боковое ребро равно 8.

3

4. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 10, а боковое ребро равно 13.

4

5. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 12, а высота равна 8.

5

6. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8, а высота равна 3.

6

7. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

7

8. Все плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её основания равна $18\sqrt{3}$.

8

9. Высота правильной треугольной пирамиды равна 3, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды S. В ответе запишите $\frac{S}{\sqrt{6}}$.

9

10. Высота треугольной пирамиды равна 15, а высоты боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны 17. Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 72.

10

Образец написания:

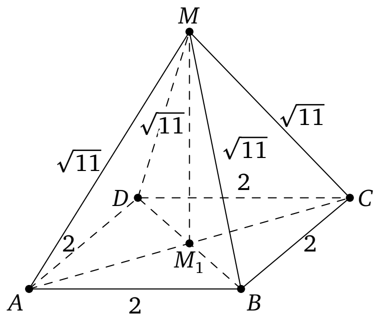
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

9. Объём пирамиды

Объём Vпирамиды равен трети произведения площади $S_{\text{осн}}$ её основания на её высоту h:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Пример 8 (решение задачи 8 варианта 1 диагностической работы 2)**.** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{11}$.



Решение. Площадь основания пирамиды равна, очевидно, 4. Высоту MM_1 пирамиды (см. рисунок) можно найти из теоремы Пифагора для треугольника AMM_1. Чтобы сделать это, необходимо знать длину отрезка AM_1, который равен половине диагонали квадрата со стороной 2. Но диагональ такого квадрата равна $2\sqrt{2}$. Поэтому $AM_1 = \sqrt{2}$, а

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3.$$

Тогда объём пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4$.

Ответ. 4.

Тренировочная работа 9

Ответы:

Вариант 1

1. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 9 и 7. Её объём равен 105. Найдите высоту этой пирамиды.

2. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 4, а высота равна $2\sqrt{3}$.

3. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объём равен $3\sqrt{3}$.

4. Найдите объём пирамиды, высота которой равна 5, а основание — прямоугольник со сторонами 4 и 9.

5. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной 9. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 2.

6. Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, если её боковое ребро равно 6, а радиус окружности, описанной около основания, равен 3.

7. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 9. Найдите объём пирамиды.

8. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.

9. Найдите объём треугольной пирамиды $DABC$, если $AB = 30$, $BC = CA = 17$ и двугранные углы при основании равны 45°.

10. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её высота равна 6, а двугранный угол при основании равен 45°.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 6. Её объём равен 40. Найдите высоту этой пирамиды.

2. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 5, а высота равна $4\sqrt{3}$.

3. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объём равен $5\sqrt{3}$.

4. Найдите объём пирамиды, высота которой равна 8, а основание — прямоугольник со сторонами 2 и 6.

5. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной 7. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 6.

6. Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, если её боковое ребро равно 13, а радиус окружности, описанной около основания, равен 11.

7. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.

8. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 3. Найдите объём пирамиды.

9. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, в котором $AB = 16$, $BC = 7$, $\angle ABC = 30°$. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 6.

10. Плоский угол при вершине правильной четырёхугольной пирамиды равен 60°. Найдите сторону основания, если объём пирамиды равен $36\sqrt{2}$.

Часть III. Тела вращения

Диагностическая работа 3

Вариант 1

1. Найдите площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна 64π, а высота цилиндра равна $\frac{2}{\pi}$.

2. Радиус основания конуса в 5 раз меньше его образующей. Во сколько раз площадь полной поверхности конуса больше площади его боковой поверхности?

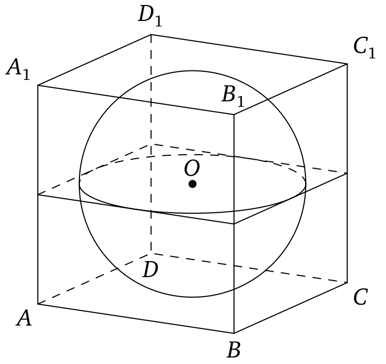
3. Один из углов осевого сечения конуса равен $120°$, высота конуса равна 4. Найдите площадь основания конуса $S_{\text{осн}}$. В ответе запишите величину $\frac{S_{\text{осн}}}{\pi}$.

4. Расстояние от точки A окружности нижнего основания цилиндра до центра O_1 его верхнего основания равно 13, образующая цилиндра равна 12. Найдите объём V цилиндра. В ответе запишите величину $\frac{V}{\pi}$.

5. Найдите объём V конуса, площадь боковой поверхности которого равна 80π, а площадь полной поверхности равна 144π. В ответе запишите величину $\frac{V}{\pi}$.

6. Площадь большого круга шара равна 11. Найдите площадь поверхности шара.

7. В прямоугольный параллелепипед вписана сфера радиуса 5. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.



Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

8. В цилиндр вписана сфера. Площадь полной поверхности цилиндра равна 39. Найдите площадь поверхности сферы.

9. Цилиндрическая кастрюля, диаметр дна которой равен 30 см, наполнена водой. Какое минимальное число кастрюль той же высоты и с диаметром дна, равным 15 см, потребуется для того, чтобы перелить в них эту воду?

10. Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 3, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 9?

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра, если площадь его основания равна 36π, а высота цилиндра равна $\frac{5}{\pi}$.

2. Радиус основания конуса в 10 раз меньше его образующей. Во сколько раз площадь полной поверхности конуса больше площади его боковой поверхности?

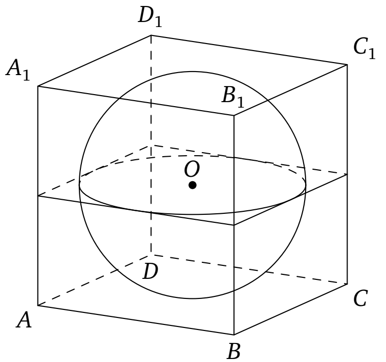
3. Один из углов осевого сечения конуса равен $60°$, высота конуса равна 6. Найдите площадь основания конуса $S_{\text{осн}}$. В ответе запишите величину $\frac{S_{\text{осн}}}{\pi}$.

4. Расстояние от точки A окружности нижнего основания цилиндра до центра O_1 его верхнего основания равно 10, образующая цилиндра равна 8. Найдите объём V цилиндра. В ответе запишите величину $\frac{V}{\pi}$.

5. Найдите объём V конуса, площадь боковой поверхности которого равна 60π, а площадь полной поверхности равна 96π. В ответе запишите величину $\frac{V}{\pi}$.

6. Площадь большого круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.

7. В прямоугольный параллелепипед вписана сфера радиуса 3. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.



1

2

3

4

5

6

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

9

10

Образец написания:

8. В цилиндр вписана сфера. Площадь полной поверхности цилиндра равна 42. Найдите площадь поверхности сферы.

9. Цилиндрическая кастрюля, диаметр дна которой равен 36 см, наполнена водой. Какое минимальное число кастрюль той же высоты и с диаметром дна, равным 12 см, потребуется для того, чтобы перелить в них эту воду?

10. Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 2, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 16?

10. Цилиндр, его элементы. Площадь поверхности цилиндра

С прямыми круговыми цилиндрами, которые изучаются в школьном курсе стереометрии, связаны, в сущности, только три формулы (формула объёма цилиндра и задачи, связанные с ней, будут рассмотрены отдельно):

$S_{\text{бок}} = 2\pi rh$ — формула площади боковой поверхности цилиндра;
$S_{\text{осн}} = \pi r^2$ — формула площади основания цилиндра;
$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ — формула площади полной поверхности цилиндра.

Здесь r — радиус основания цилиндра, а h — его высота и образующая, $S_{\text{бок}}$, $S_{\text{полн}}$ и $S_{\text{осн}}$ — соответственно площади боковой поверхности, полной поверхности и основания цилиндра.

Пример 1 (решение задачи 1 варианта 1 диагностической работы 3). Найдите площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}}$, если площадь его основания равна 64π, а высота цилиндра равна $\frac{2}{\pi}$.

Решение. Пусть r — радиус основания цилиндра, $h = \frac{2}{\pi}$ — его высота. Площадь круга радиуса r равна πr^2. По условию $\pi r^2 = 64\pi$, откуда $r^2 = 64$ и $r = 8$. Но тогда $S_{\text{бок}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 8 \cdot \frac{2}{\pi} = 32$.

Ответ. 32.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 10

Вариант 1

1. Найдите высоту цилиндра, диагональ осевого сечения и радиус основания которого равны соответственно 17 и 4.

2. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь этого сечения, если площадь основания цилиндра равна 25π.

3. Плоскость пересекает цилиндр так, что в сечении получается квадрат. Найдите высоту цилиндра, если расстояние от этого сечения до оси цилиндра равно 12, а радиус основания равен 13.

4. Высота цилиндра равна 2, а радиус основания равен 13. Найдите площадь сечения, проведённого параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 от него.

5. Длина окружности основания цилиндра равна 8, высота равна 7. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 72π, а высота равна 6. Найдите диаметр основания.

7. Площадь полной поверхности цилиндра равна 70π, а радиус основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 27π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

9. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите радиус основания цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 36π.

10. Точка, лежащая на окружности верхнего основания цилиндра, соединена с точкой, лежащей на окружности нижнего основания. Угол между проведённой прямой и осью цилиндра составляет 45°. Найдите радиус цилиндра, если длина отрезка, соединяющего выбранные точки, равна $7\sqrt{2}$, а радиус цилиндра равен его высоте.

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, радиус основания и высота которого равны соответственно 3 и 8.

1

2. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь этого сечения, если площадь основания цилиндра равна 13π.

2

3. Плоскость пересекает цилиндр так, что в сечении получается квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси, если высота цилиндра равна 12, а радиус основания равен 10.

3

4. Площадь сечения цилиндра плоскостью, отстоящей от оси цилиндра на расстояние, равное 4, равна 36. Найдите высоту цилиндра, если радиус основания равен 5.

4

5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 36, высота равна 3. Найдите длину окружности основания цилиндра.

5

6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 28π, а диаметр основания равен 4. Найдите высоту цилиндра.

6

7. Площадь полной поверхности цилиндра равна 132π, а радиус основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.

7

8. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 43π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

8

9. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите высоту цилиндра, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 25π.

9

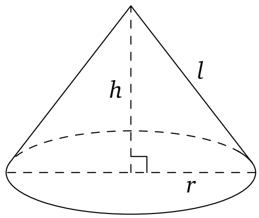
10. Точка, лежащая на окружности верхнего основания цилиндра, соединена с точкой, лежащей на окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведёнными в эти точки, равен 60°. Найдите длину отрезка, соединяющего выбранные точки, если радиус и высота цилиндра равны $3\sqrt{2}$.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

11. Конус, его элементы. Площадь поверхности конуса



В школьном курсе геометрии рассматриваются только прямые круговые конусы. Пусть h — высота конуса, r — радиус окружности основания, l — образующая конуса. Тогда имеют место следующие формулы:

$S_{бок} = \pi rl$ — формула площади боковой поверхности конуса;
$S_{осн} = \pi r^2$ — формула площади основания конуса;
$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ — формула площади полной поверхности конуса;
$l^2 = r^2 + h^2$ — формула, связывающая высоту, образующую и радиус основания конуса.

Для решения большинства задач по указанной теме приведённых формул вполне достаточно.

Пример 2 (решение задачи 2 варианта 1 диагностической работы 3). Радиус основания конуса в пять раз меньше его образующей. Во сколько раз площадь полной поверхности конуса больше площади его боковой поверхности?

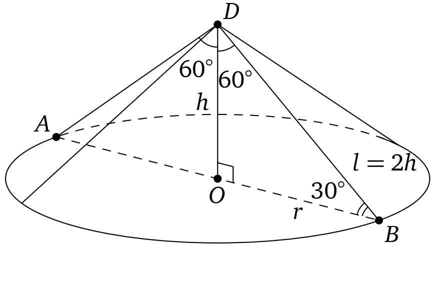
Решение. По условию $l = 5r$. Тогда

$$S_{бок} = \pi rl = 5\pi r^2, \quad S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 5\pi r^2 + \pi r^2 = 6\pi r^2 \quad \text{и} \quad \frac{S_{полн}}{S_{бок}} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Ответ. 1,2.

Пример 3 (решение задачи 3 варианта 1 диагностической работы 3). Один из углов осевого сечения конуса равен 120°, высота конуса равна 4. Найдите площадь основания конуса $S_{осн}$. В ответе запишите величину $\dfrac{S_{осн}}{\pi}$.

Решение. Пусть D — вершина, O — центр основания, DAB — осевое сечение конуса, $l = DA = DB$ — образующая конуса, $h = DO = 4$ — его высота, $r = OA = OB$ — радиус основания конуса. Поскольку осевое сечение является равнобедренным треугольником, только угол ADB может быть равен 120°. Но тогда $\angle ODB = 60°$, а $r = h \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}$. Следовательно, $S_{осн} = \pi r^2 = 48\pi$, а $\dfrac{S_{осн}}{\pi} = 48$.



Ответ. 48.

Тренировочная работа 11

Вариант 1

Ответы:

1. Высота конуса равна 15, а образующая равна 17. Найдите диаметр основания конуса.

1

2. Образующая конуса длины 14 наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус основания конуса.

2

3. Высота конуса равна 16, а площадь осевого сечения равна 192. Найдите образующую этого конуса.

3

4. Площадь основания конуса равна 9π, высота равна 5. Найдите площадь осевого сечения конуса.

4

5. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник, площадь которого равна 25. Найдите радиус основания конуса.

5

6. Площадь боковой поверхности конуса равна 54, длина окружности основания равна 18. Найдите образующую конуса.

6

7. Площадь полной поверхности конуса равна 64. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

7

8. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите образующую конуса, если площадь боковой поверхности конуса равна 32π.

8

9. Образующая конуса наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь основания, если площадь боковой поверхности конуса равна 84.

9

10. Площадь основания конуса равна 75. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 2 и 3, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Высота конуса равна 12, а диаметр основания равен 10. Найдите образующую конуса.

2. Образующая конуса длины 8 наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту конуса.

3. Высота конуса равна 12, а образующая равна 13. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

4. Площадь основания конуса равна 25π, высота равна 2. Найдите площадь осевого сечения конуса.

5. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь, если радиус основания конуса равен 7.

6. Длина окружности основания конуса равна 7, образующая равна 6. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

7. Площадь полной поверхности конуса равна 144. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении $1:3$, считая от вершины. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

8. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Найдите радиус основания конуса, если площадь боковой поверхности конуса равна 50π.

9. Образующая конуса наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь основания равна 23.

10. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 3, считая от вершины. Найдите площадь основания конуса, если площадь сечения конуса этой плоскостью равна 2.

12. Объём цилиндра и объём конуса

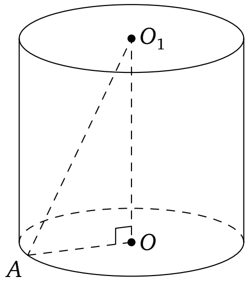
Для решения задач на вычисление объёмов цилиндра и конуса достаточно знания основных свойств этих фигур и, разумеется, формул их объёмов:

$V = \pi r^2 h$ — формула объёма цилиндра (здесь h — высота цилиндра, r — радиус окружности основания, V — объём цилиндра);

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ — формула объёма конуса (здесь h — высота конуса, r — радиус окружности основания, V — объём конуса).

Задачи на вычисление объёма цилиндра и конуса можно успешно решать, зная только две величины: радиус основания и высоту. В простейших случаях эти величины даны в условии и остаётся их подставить в одну из приведённых формул, в более сложных одну из них или даже обе нужно найти исходя из условия задачи.

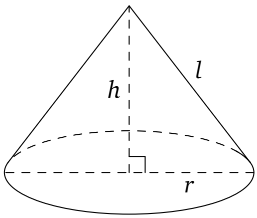
Пример 4 (решение задачи 4 варианта 1 диагностической работы 3). Расстояние от точки A окружности нижнего основания цилиндра до центра O_1 его верхнего основания равно 13, образующая цилиндра равна 12. Найдите объём V цилиндра. В ответе запишите величину $\frac{V}{\pi}$.



Решение. Образующая цилиндра является его высотой. Для вычисления объёма необходимо найти радиус окружности основания цилиндра. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра. Тогда $OO_1 = 12$, $AO_1 = 13$. Искомый радиус OA находим из теоремы Пифагора для треугольника OAO_1. Получим $OA = \sqrt{O_1A^2 - OO_1^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Объём цилиндра: $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi$, следовательно, $\frac{V}{\pi} = 300$.

Ответ. 300.

Пример 5 (решение задачи 5 варианта 1 диагностической работы 3). Найдите объём V конуса, площадь боковой поверхности которого равна 80π, а площадь полной поверхности равна 144π. В ответе запишите величину $\frac{V}{\pi}$.



Решение. Пусть l — образующая конуса, h — его высота, r — радиус окружности основания. Площадь основания конуса равна разности площадей его полной поверхности и его боковой поверхности: $\pi r^2 = 144\pi - 80\pi = 64\pi$. Значит, $r^2 = 64$, а $r = 8$. По условию $\pi r l = 80\pi$, откуда следует, что $l = \frac{80}{r} = \frac{80}{8} = 10$. Высоту h найдём из теоремы Пифагора: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Объём конуса: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi$, следовательно, $\frac{V}{\pi} = 128$.

Ответ. 128.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 12

Вариант 1

1. Найдите объём V цилиндра, радиус основания которого равен 7, а высота равна 2. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

2. Объём цилиндра равен 21π, площадь основания равна 7π. Найдите высоту цилиндра.

3. Осевое сечение цилиндра является квадратом. Найдите высоту цилиндра, если его объём равен 250π.

4. В цилиндре проведено сечение, параллельное основаниям и делящее высоту на два отрезка длиной 8 и 2, считая от верхнего основания. Во сколько раз объём большего отсечённого цилиндра больше объёма меньшего отсечённого цилиндра.

5. В цилиндрический сосуд налили 2900 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 8 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

6. Найдите объём V конуса, радиус основания которого равен 5, а высота равна 6. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

7. Найдите объём V конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

8. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 36. Найдите объём V конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

9. Высота конуса равна 3, а длина окружности основания равна 8π. Найдите объём V конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

10. Образующая конуса равна 13 и составляет с плоскостью основания угол, синус которого равен $\frac{12}{13}$. Найдите объём V конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

Ответы:

Вариант 2

1. Найдите объём V цилиндра, радиус основания которого равен 3, а высота равна 5. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

2. Объём цилиндра равен 72, высота равна 9. Найдите площадь основания цилиндра.

3. Осевое сечение цилиндра является квадратом. Найдите радиус основания цилиндра, если его объём равен 54π.

4. В цилиндре проведено сечение, параллельное основаниям и делящее высоту на два отрезка длиной 15 и 5, считая от верхнего основания. Во сколько раз объём большего отсечённого цилиндра больше объёма меньшего отсечённого цилиндра.

5. В цилиндрический сосуд налили 2800 $см^3$ воды. Уровень воды при этом достиг высоты 16 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в $см^3$.

6. Найдите объём V конуса, радиус основания которого равен 4, а высота равна 3. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

7. Найдите объём V конуса, радиус основания которого равен 5, а образующая равна 13. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

8. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, боковая сторона которого равна $12\sqrt{2}$. Найдите объём V конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

9. Длина образующей конуса равна 5, а длина окружности основания равна 6π. Найдите объём V конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

10. Образующая конуса равна 5 и составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$. Найдите объём V конуса. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

13. Сфера и шар, их элементы. Площадь сферы и объём шара

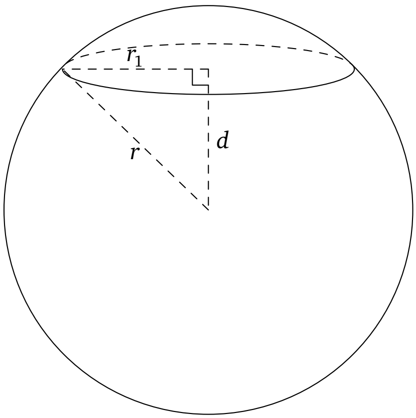
Этот параграф посвящён краткому обзору тех задач на сферу, шар и их элементы, которые могут встретиться в качестве одного из заданий с кратким ответом на ЕГЭ по математике.

Формул, связанных со сферой и шаром, не так много:

$S=4\pi r^2$ — формула площади S поверхности сферы радиуса r;

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ — формула объёма V шара радиуса r.

Любое сечение шара (сферы) плоскостью является кругом (окружностью). Сечение шара (сферы) плоскостью, проходящей через центр шара (сферы), называется большим кругом (большой окружностью) шара (сферы). Если плоскость пересекает шар (сферу), то радиус r шара (сферы), радиус r_1 сечения и расстояние d от центра шара (сферы) до секущей плоскости связаны в силу теоремы Пифагора формулой $r^2=d^2+r_1^2$.



Если $d=r$, то плоскость является касательной к сфере, а радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, будет перпендикулярен касательной плоскости.

Пример 6 (решение задачи 6 варианта 1 диагностической работы 3)**.** Площадь большого круга шара равна 11. Найдите площадь поверхности шара.

Решение. Площадь большого круга шара равна πr^2, где r — радиус шара, а площадь поверхности шара равна $4\pi r^2$. Значит, площадь поверхности шара в 4 раза больше площади большого круга и равна $4\cdot 11=44$.

Ответ. 44.

Тренировочная работа 13

Вариант 1

Ответы:

1. Шар пересечён плоскостью на расстоянии 4 от центра. Найдите радиус сечения, если радиус шара равен 5.

2. Шар пересечён плоскостью на расстоянии 8 от центра. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 15.

3. Шар диаметром 20 пересечён плоскостью. Найдите расстояние от этого сечения до центра шара, если радиус сечения равен 8.

4. Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в пять раз меньше радиуса шара. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 4π.

5. Шар пересечён двумя параллельными плоскостями, расположенными по одну сторону от его центра. Радиус первого сечения равен 12, радиус второго сечения равен 9. Расстояние от центра шара до плоскости первого сечения равно 9. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

6. Сосуд, имеющий форму полусферы, заполнен водой. Какое наименьшее число одинаковых бокалов, имеющих форму конуса с прикреплённой к вершине ножкой, радиус которого в 3 раза меньше радиуса полусферы, а высота равна радиусу полусферы, потребуется для того, чтобы перелить всю эту воду?

7. Площадь большого круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.

8. Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в два раза меньше радиуса шара. Найдите площадь поверхности шара, если площадь сечения равна 3.

9. Во сколько раз объём шара больше объёма конуса, высота и радиус основания которого равны радиусу шара?

10. У шарообразной капсулы из свинца площадь поверхности внутренней сферы капсулы равна 16π, а площадь поверхности внешней сферы равна 144π. Найдите толщину капсулы, если известно, что внешняя и внутренняя сферы имеют общий центр.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Вариант 2

1. Шар пересечён плоскостью на расстоянии 5 от центра. Найдите радиус сечения, если радиус шара равен 13.

2. Шар пересечён плоскостью на расстоянии 24 от центра. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 7.

3. Шар диаметром 26 пересечён плоскостью. Найдите расстояние от этого сечения до центра шара, если радиус сечения равен 12.

4. Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в три раза меньше радиуса шара. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 16π.

5. Шар пересечён двумя параллельными плоскостями, расположенными по одну сторону от его центра. Радиус первого сечения равен 12, радиус второго сечения равен 5. Расстояние от центра шара до плоскости второго сечения равно 12. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

6. Сосуд, имеющий форму полусферы, заполнен водой. Какое наименьшее число одинаковых стаканов, имеющих форму цилиндра, радиус которого в 3 раза меньше радиуса полусферы, а высота в два раза больше радиуса полусферы, потребуется для того, чтобы перелить всю эту воду?

7. Площадь большого круга шара равна 8. Найдите площадь поверхности шара.

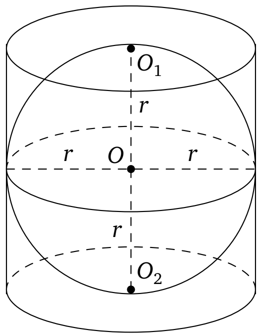
8. Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в три раза меньше радиуса шара. Найдите площадь сечения, если площадь поверхности шара равна 72.

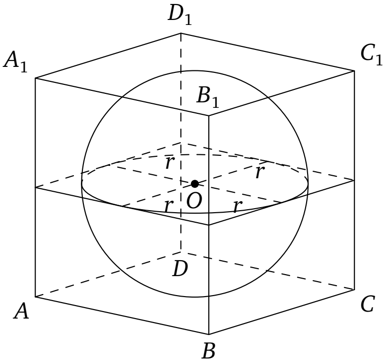
9. Во сколько раз объём шара меньше объёма конуса, высота и радиус основания которого равны диаметру шара?

10. У шарообразной капсулы из свинца площадь поверхности внутренней сферы капсулы равна 36π, а площадь поверхности внешней сферы равна 100π. Найдите толщину капсулы, если известно, что внешняя и внутренняя сферы имеют общий центр.

14. Комбинации тел вращения и многогранников

Этот параграф посвящён обзору задач на комбинации тел вращения и многогранников, которые составляют довольно большую часть заданий с кратким ответом открытого банка. Это несложные задачи, которые часто можно решить исходя из наглядных соображений с использованием следующих фактов. Если сфера заключена между двумя параллельными плоскостями и касается каждой из них, то расстояние между такими плоскостями равно диаметру сферы. Последнее соображение часто используется при решении задач на сферы, вписанные в призмы и цилиндры.

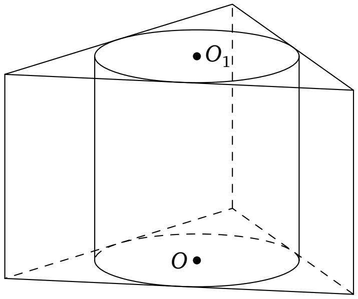


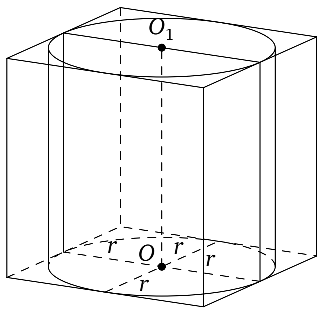


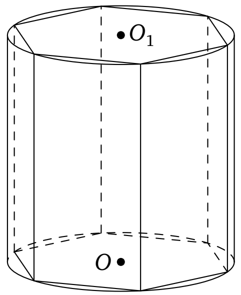
Если в цилиндр вписана сфера, то высота цилиндра и диаметр его основания равны диаметру сферы.

Если сфера вписана в прямоугольный параллелепипед, то каждое ребро такого параллелепипеда равно диаметру сферы, т. е. этот параллелепипед является кубом.

Если цилиндр вписан в прямую призму, то окружности оснований цилиндра вписаны в основания призмы, а высота цилиндра равна высоте призмы. Если цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, то его основание — квадрат, сторона которого равна диаметру цилиндра.



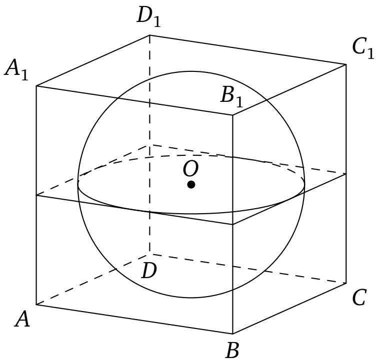




Если в цилиндр вписана призма, то окружности оснований цилиндра описаны вокруг оснований призмы, а высота цилиндра равна высоте призмы.

Разумеется, возможны и другие комбинации многогранников и тел вращения, здесь приведены наиболее часто встречающиеся среди заданий открытого банка.

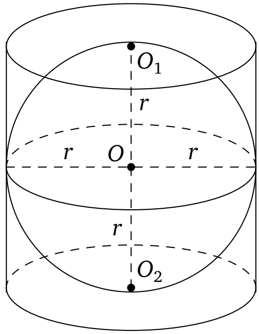
Пример 7 (решение задачи 7 варианта 1 диагностической работы 3). В прямоугольный параллелепипед вписана сфера радиуса 5. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.



Решение. Расстояния между параллельными гранями параллелепипеда равны диаметру сферы и равны рёбрам параллелепипеда. Поэтому каждое ребро параллелепипеда равно 10, площадь каждой его грани равна 100, а площадь полной поверхности равна $100 \cdot 6 = 600$.

Ответ. 600.

Пример 8 (решение задачи 8 варианта 1 диагностической работы 3). В цилиндр вписана сфера. Площадь поверхности цилиндра равна 39. Найдите площадь поверхности сферы.



Решение. Расстояние между основаниями цилиндра равно диаметру сферы, а радиус r основания цилиндра равен радиусу сферы. Таким образом, высота цилиндра равна $2r$, а его площадь поверхности

$$S_{\text{полн}} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2.$$

Требуется найти площадь сферы, равную $4\pi r^2$. По условию $6\pi r^2 = 39$, откуда

$$2\pi r^2 = 13, \quad \text{а} \quad 4\pi r^2 = 26.$$

Ответ. 26.

Тренировочная работа 14

Вариант 1

Ответы:

1. Шар вписан в куб. Найдите радиус шара, если диагональ куба равна $8\sqrt{3}$.

1

2. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 321. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2

3. Шар объёмом 8 вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.

3

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 3 и 5 соответственно. Найдите объём параллелепипеда.

4

5. Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Найдите объём призмы, если объём цилиндра равен $8\pi\sqrt{3}$.

5

6. Цилиндр описан около шара. Объём цилиндра равен 39. Найдите объём шара.

6

7. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 5. Найдите объём шара.

7

8. Цилиндр описан около шара, площадь поверхности которого равна 24. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

8

9. Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 125. Найдите радиус сферы.

9

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ рёбра основания равны 2, а высота равна $2\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, E, A_1, C_1, E_1.

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Шар вписан в куб. Найдите радиус шара, если диагональ куба равна $14\sqrt{3}$.

2. Шар вписан в цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 154. Найдите площадь боковой поверхности шара.

3. Шар объёмом 6 вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2 и 7 соответственно. Найдите объём параллелепипеда.

5. Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Найдите объём призмы, если объём цилиндра равен $12\pi\sqrt{3}$.

6. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 28. Найдите объём цилиндра.

7. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 32. Найдите объём конуса.

8. Около шара описан цилиндр, площадь полной поверхности которого равна 12. Найдите площадь поверхности шара.

9. Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 27. Найдите радиус сферы.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ рёбра основания равны 5, а высота равна $10\sqrt{3}$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, E, B_1, C_1, E_1.

15. Изменение площади поверхности и объёма фигуры при изменении её линейных размеров

Задачи на вычисление площадей и объёмов фигур при изменении их размеров составляют довольно значительную часть банка заданий ЕГЭ по математике с кратким ответом. Для решения этих задач достаточно понимать, как изменяется площадь плоской фигуры определённого вида (треугольника, параллелограмма, круга) при изменении линейных размеров этой фигуры и как изменяется площадь поверхности или объём пространственного тела при изменении размеров этого тела.

Начнём с ответа на самый простой вопрос: как изменится площадь треугольника, если одну из его сторон изменить в k раз, не меняя проведённую к ней высоту? Ответ здесь очевиден и, вообще говоря, не требует даже рисунка: *если сторона треугольника изменится в k раз, то и площадь этого треугольника изменится в k раз.*

Из сформулированного утверждения следует, что если одну из сторон треугольника изменить в k раз, а другую — в n раз, не меняя угол между ними, то площадь треугольника изменится в kn раз. Для доказательства достаточно воспользоваться предыдущим утверждением дважды: сначала для одной стороны, потом для другой.

Совершенно аналогичное утверждение справедливо и для параллелограмма (в частности, и для прямоугольника): если одну из смежных сторон параллелограмма изменить в k раз, а другую — в n раз, не меняя угол между ними, то площадь параллелограмма изменится в kn раз. Заметим, что для трапеции подобное утверждение неверно.

У квадрата (и любого ромба) все стороны равны. Поэтому изменение одной стороны в k раз ведёт к такому же изменению и смежной с ней стороны. Следовательно, для квадрата (и вообще любого ромба) предыдущее утверждение можно переформулировать так: если сторону квадрата (ромба) изменить в k раз (для ромба без изменения углов), то площадь квадрата (ромба) изменится в k^2 раз.

Аналогично изменение радиуса круга в k раз приводит к изменению квадрата радиуса в k^2 раз. Поэтому если радиус круга изменить в k раз, то площадь круга изменится в k^2 раз. Длина окружности такого круга при этом изменится в k раз.

Из предыдущего следует, что если радиус основания цилиндра или конуса изменить в k раз, то площадь основания изменится в k^2 раз. Если при этом высоту оставить без изменений, то объём цилиндра (конуса) также изменится в k^2 раз. Если же изменить только высоту, например, в n раз, то и объём цилиндра (конуса) изменится в n раз. Теперь понятно, что при одновременном изменении радиуса основания цилиндра или конуса в k раз, а высоты — в n раз объём изменится в k^2n раз. Поскольку площадь боковой поверхности цилиндра (конуса) пропорциональна произведению радиуса основания на образующую, изменение одной из этих величин в k раз, а другой — в n раз приведёт к изменению площади боковой поверхности в kn раз.

Пример 9 (решение задачи 9 варианта 1 диагностической работы 3). Цилиндрическая кастрюля, диаметр дна которой равен 30 см, наполнена водой. Какое минимальное число кастрюль той же высоты и с диаметром дна, равным 15 см, потребуется для того, чтобы перелить в них эту воду?

Решение. Из условия следует, что радиус основания малой кастрюли вдвое меньше радиуса основания большой кастрюли, а высоты кастрюль одинаковы. Поэтому объём малой кастрюли будет ровно в 4 раза меньше объёма большой кастрюли и для того, чтобы перелить всю воду, потребуются 4 малые кастрюли.

Ответ. 4.

Изменение радиуса шара в k раз приводит к изменению куба радиуса в k^3 раз, а квадрата радиуса — в k^2 раз. Поэтому если радиус шара изменить в k раз, то объём шара изменится в k^3 раз, а площадь поверхности сферы, ограничивающей этот шар, — в k^2 раз.

Пример 10 (решение задачи 10 варианта 1 диагностической работы 3). Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 3, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 9?

Решение. Из условия следует, что радиус нового шара ровно в 3 раза больше радиуса исходного шарика. Поэтому объём шара радиуса 9 будет в $3^3 = 27$ раз больше объёма шара радиуса 3. Значит, потребуется 27 шаров радиуса 3.

Ответ. 27.

Если основанием пирамиды или призмы является треугольник или параллелограмм (в частности, прямоугольник, ромб, квадрат), то изменение одной из сторон основания в k раз, а другой (для параллелограмма — смежной) — в n раз (без изменения угла между ними) приводит к изменению площади основания в kn раз. Если при этом высоту пирамиды (призмы) оставить без изменений, то объём такой пирамиды (призмы) также изменится в kn раз. Если же изменить только высоту пирамиды (призмы), например, в l раз, то и объём пирамиды (призмы) изменится в l раз. Теперь понятно, что при одновременном изменении одной из сторон основания пирамиды (призмы) в k раз, другой (для параллелограмма — смежной) — в n раз, а высоты пирамиды (призмы) в l раз объём пирамиды (призмы) изменится в knl раз. Заметим, что для такой пирамиды (призмы) изменение бокового ребра в l раз приводит (это можно доказать, рассмотрев подобные треугольники) и к изменению высоты в l раз, поэтому в некоторых задачах речь может идти не об изменении высоты, а об изменении бокового ребра. Для пирамид и призм с основаниями, отличными от треугольника и параллелограмма, оценить изменение площади основания при изменении одной или двух его сторон в общем виде нельзя. Изменение же высоты таких пирамид (призм) в l раз приводит и к изменению объёма в l раз.

Тренировочная работа 15

Вариант 1

Ответы:

1. Радиус основания первого конуса в 3 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 2 раза больше, чем высота второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 18?

2. Объём цилиндра равен 1,5. Радиус основания увеличили в 2 раза, а высоту уменьшили в 3 раза. Найдите объём получившегося цилиндра.

3. Объём конуса равен 6. Чему равен объём цилиндра, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный конус?

4. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

5. Радиус основания первого конуса в 6 раз больше, чем радиус основания второго конуса, а высота первого конуса в 4 раза меньше высоты второго. Чему равен объём первого конуса, если объём второго равен 14?

6. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём сосуда 540 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

7. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в 1,6 раза?

8. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в два раза выше второй, а вторая втрое шире первой. Во сколько раз площадь боковой поверхности второй кружки больше площади боковой поверхности первой?

9. Объём первого куба в 8 раз меньше объёма второго куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба меньше площади поверхности второго куба?

10. Площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго в 16 раз. Во сколько раз объём первого шара больше объёма второго?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Радиус основания первого конуса в 2 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 3 раза больше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 22?

2. Объём цилиндра равен 1. Радиус основания уменьшили в 2 раза, а высоту увеличили в 3 раза. Найдите объём получившегося цилиндра.

3. Объём цилиндра равен 12. Чему равен объём конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?

4. Металлический шар весит 360 г. Сколько граммов будет весить шарик вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же металла?

5. Радиус основания первого конуса в 3 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а высота первого конуса в 2 раза больше высоты второго. Чему равен объём второго конуса, если объём первого равен 7?

6. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём сосуда 270 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах.

7. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в 1,2 раза?

8. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в три раза ниже второй, а вторая вдвое уже первой. Во сколько раз площадь боковой поверхности второй кружки больше площади боковой поверхности первой?

9. Площадь поверхности первого куба меньше площади поверхности второго куба в 9 раз. Во сколько раз объём первого куба меньше объёма второго куба?

10. Объём одного шара в 125 раз больше объёма второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Часть IV. Диагностические работы

Ответы:

Диагностическая работа 4

Вариант 1

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1. Ответ дайте в градусах.

1

2. Медиана основания правильной треугольной пирамиды равна 3, а высота пирамиды равна 2. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

2

3. Найдите площадь основания цилиндра, осевым сечением которого является квадрат площадью $\frac{16}{\pi}$.

3

4. Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высота уменьшится в 5 раз, а радиус основания останется прежним?

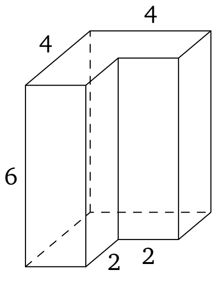
4

5. Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 4, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 16?

5

6. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.

6



7. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 2, а высота пирамиды равна 1. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

7

Образец написания:

Ответы:

8

9

10

8. Вокруг цилиндра описана правильная треугольная призма. Найдите объём призмы, если объём цилиндра равен $2\pi\sqrt{3}$.

9. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 30.

10. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 192π.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BA_1 и DC_1. Ответ дайте в градусах.

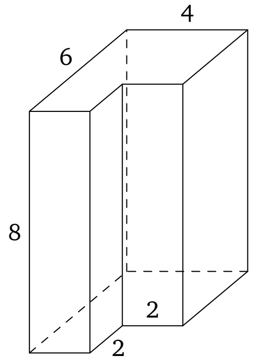
2. Биссектриса основания правильной треугольной пирамиды равна 3, а боковое ребро равно 4. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

3. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найдите площадь основания цилиндра, если диагональ осевого сечения равна $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$.

4. Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 3 раза, а высота уменьшится в 1,5 раза?

5. Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 1, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 5?

6. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



7. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостью боковой грани пирамиды и плоскостью её основания. Ответ дайте в градусах.

1

2

3

4

5

6

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

9

10

8. Вокруг цилиндра описана правильная треугольная призма. Найдите объём призмы, если объём цилиндра равен $5\pi\sqrt{3}$.

9. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём цилиндра, если объём конуса равен 30.

10. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Найдите радиус шара, если длина окружности сечения равна $7\sqrt{3}\pi$.

Образец написания:

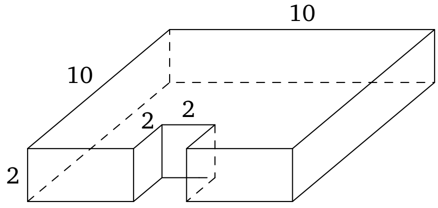
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 5

Ответы:

Вариант 1

1. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



1

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости SBE.

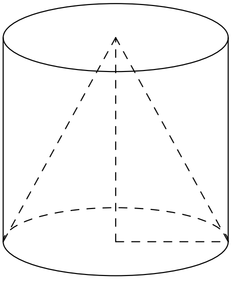
2

3. Точки A и B лежат на окружности одного, а C и D — на окружности другого основания цилиндра, при этом $ABCD$ — квадрат, плоскость которого не параллельна оси цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если известно, что радиус основания цилиндра равен 6, а диагональ квадрата равна 13.

3

4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 111. Найдите объём конуса.

4



5. Металлический шар весит 540 г. Сколько граммов будет весить шарик втрое меньшего радиуса, сделанный из того же металла?

5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

6

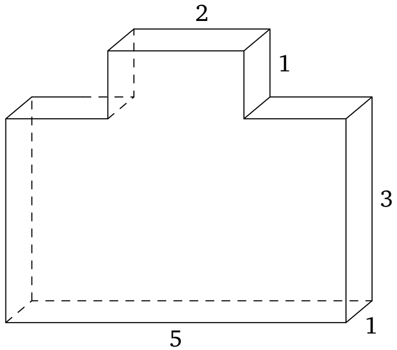
7

8

9

10

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.

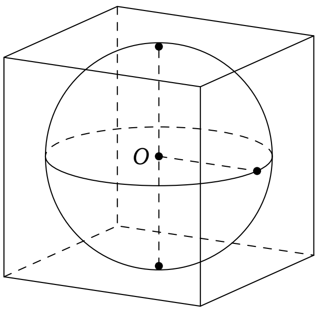


7. В правильной шестиугольной пирамиде все рёбра уменьшили в пять раз. Во сколько раз уменьшилась площадь полной поверхности пирамиды?

8. Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне $h = 90$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания втрое больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

9. Радиус основания конуса равен 8, а образующая равна 17. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

10. Куб описан около сферы радиуса 10. Найдите объём куба.



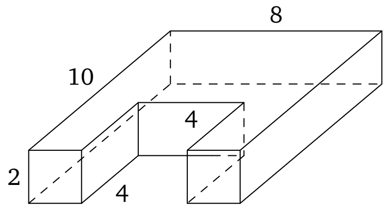
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Вариант 2

1. На рисунке изображена прямая призма. Найдите площадь её полной поверхности, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



1

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $ABCDEF$ равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCF.

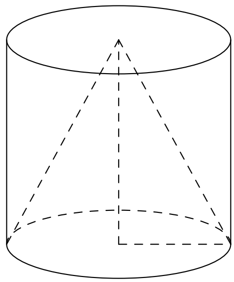
2

3. Точки A и B лежат на окружности одного, а C и D — на окружности другого основания цилиндра, при этом $ABCD$ — квадрат, плоскость которого не параллельна оси цилиндра. Найдите высоту цилиндра, если известно, что радиус основания цилиндра равен 8, а диагональ квадрата равна 20.

3

4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 138. Найдите объём конуса.

4



5. Металлический шар весит 640 г. Сколько граммов будет весить шарик вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же металла?

5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

6

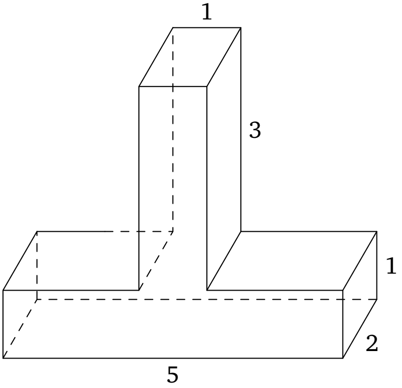
7

8

9

10

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.

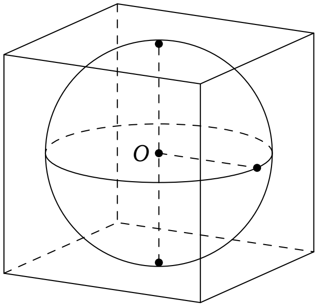


7. В правильной шестиугольной пирамиде все рёбра уменьшили втрое. Во сколько раз уменьшилась площадь полной поверхности пирамиды?

8. Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне $h = 60$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания вдвое меньше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

9. Диаметр основания конуса равен 16, а образующая равна 17. Найдите высоту конуса.

10. Куб объёмом 21 600 описан около сферы. Найдите радиус сферы.



Образец написания:

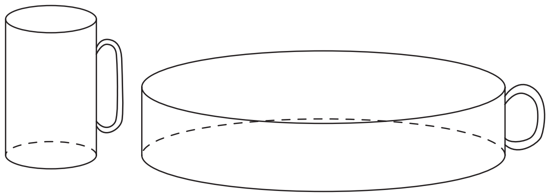
Диагностическая работа 6

Вариант 1

1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 8, а диагональ AC_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки B, B_1 и D.

2. Все рёбра тетраэдра равны 2. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

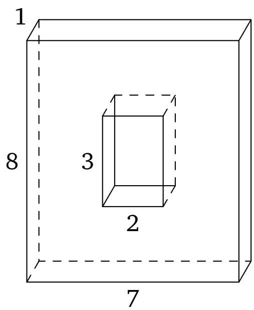
3. Первая цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в четыре раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



4. Конус вписан в правильную четырёхугольную призму. Основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса лежит на другом основании призмы. Найдите сторону основания призмы, если образующая конуса равна 17, а высота равна 15.

5. Бетонный шар весит 1,3 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Ответы:

1

2

3

4

5

6

Образец написания:

Ответы:

7

8

9

10

7. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды в два раза больше её апофемы. Найдите угол между плоскостями несмежных боковых граней пирамиды. Ответ дайте в градусах.

8. На окружностях обоих оснований цилиндра выбрано по точке, расстояние между которыми равно 13. Найдите расстояние от прямой, проходящей через эти точки, до оси цилиндра, если высота цилиндра равна 5, а радиус основания равен 10.

9. Радиус основания первого конуса в 2 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 3 раза больше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 12?

10. Шар, объём которого равен 7π, вписан в куб. Найдите объём куба.

Образец написания:

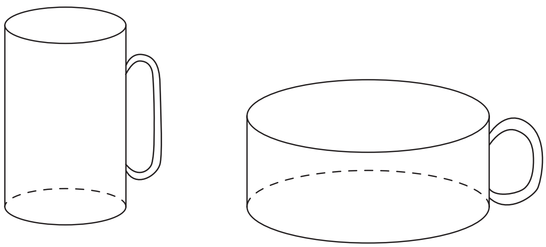
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 15, а диагональ BD_1 равна 25. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.

2. Все рёбра тетраэдра равны 4. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

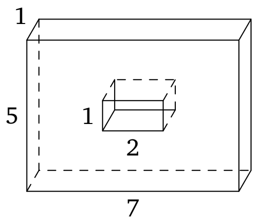
3. Первая цилиндрическая кружка втрое выше второй, зато вторая в три раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



4. Конус вписан в правильную четырёхугольную призму. Основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса лежит на другом основании призмы. Найдите образующую конуса, если сторона основания призмы равна 12, а высота равна 8.

5. Бетонный шар весит 0,8 т. Сколько тонн будет весить шар втрое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

6. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



Ответы:

1

2

3

4

5

6

Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

7

8

9

10

Образец написания:

7. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна её апофеме. Найдите угол между плоскостями несмежных боковых граней пирамиды. Ответ дайте в градусах.

8. На окружностях обоих оснований цилиндра выбрано по точке. Найдите расстояние между этими точками, если расстояние от прямой, проходящей через эти точки, до оси цилиндра равно 5, высота цилиндра равна 7, а радиус основания равен 13.

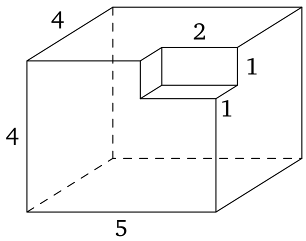
9. Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 5 и 12, а второго — 2 и 6. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса меньше площади боковой поверхности первого?

10. Шар, объём которого равен 9π, вписан в куб. Найдите объём куба.

Диагностическая работа 7

Вариант 1

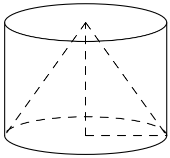
1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $2\sqrt{13}$, а сторона основания равна $6\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а площадь основания равна 16π. Найдите высоту цилиндра.

4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $36\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



5. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 3. Найдите его объём.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $\sqrt{54}$. Найдите расстояние от точки D до прямой A_1C_1.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

7

8

9

10

7. Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $\sqrt{8}$, а высота пирамиды равна $\sqrt{7}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

8. Металлический пожарный конус наполнен песком (так, что песок занимает в точности весь объём конуса). Сколько таких конусов с песком потребуется, чтобы наполнить цилиндрическое ведро, если известно, что радиусы оснований ведра и конуса одинаковы, а высота ведра вдвое больше высоты конуса?

9. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 18.

10. Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 7, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 21?

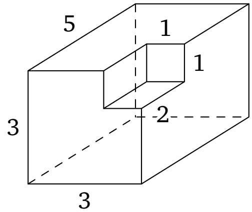
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

Ответы:

1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



1

2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $4\sqrt{13}$, а высота основания равна 18. Найдите высоту пирамиды.

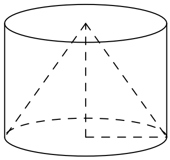
2

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 35π, а площадь основания равна 25π. Найдите высоту цилиндра.

3

4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $12\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

4



5. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его объём.

5

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны $\sqrt{96}$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой BA_1.

6

7. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 9, а высота пирамиды равна $3\sqrt{7}$. Найдите сторону основания пирамиды.

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

9

10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

8. Металлический пожарный конус наполнен песком (так, что песок занимает в точности весь объём конуса). Сколько таких конусов с песком потребуется, чтобы наполнить цилиндрическое ведро, если известно, что оно имеет ту же высоту, что и конус, а радиус основания ведра вдвое больше радиуса основания конуса?

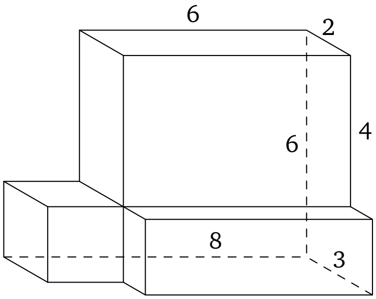
9. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 144.

10. Сколько нужно взять металлических шариков радиуса 5, чтобы, расплавив их, отлить шар радиуса 20?

Диагностическая работа 8

Вариант 1

1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



2. Высота правильной четырёхугольной пирамиды в два раза меньше диагонали основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

3. Площадь полной поверхности цилиндра равна 8π, а высота равна 3. Найдите радиус основания цилиндра.

4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

5. В шар вписан куб. Найдите радиус шара, если ребро куба равно $10\sqrt{3}$.

6. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$, а стороны основания равны 4. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и середину рёбра B_1C_1.

7. Площадь поверхности тетраэдра равна 18. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

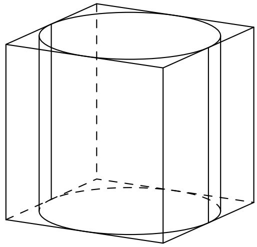
Ответы:

8

9

10

8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объём параллелепипеда равен 144. Найдите высоту цилиндра.



9. Даны два конуса. Радиус основания и высота первого конуса равны соответственно 10 и 3, а второго — 5 и 6. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго?

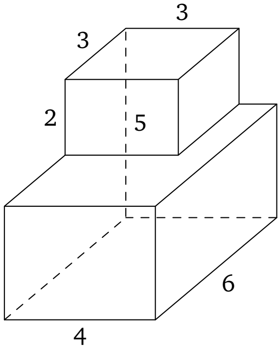
10. Металлический шар диаметром 32 см расплавили, для того чтобы изготовить шарики диаметром 8 см. Какое максимальное число таких шариков можно изготовить?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вариант 2

1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, если все двугранные углы прямые, а числа на рисунке означают длины соответствующих рёбер.



2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

3. Площадь полной поверхности цилиндра равна 14π, а высота равна 6. Найдите радиус основания цилиндра.

4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $9\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

5. В шар вписан куб. Найдите ребро куба, если радиус шара равен $9\sqrt{3}$.

6. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$, а стороны основания равны 16. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и середину ребра AB.

7. Площадь полной поверхности тетраэдра равна 16. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины рёбер данного тетраэдра.

Ответы:

1

2

3

4

5

6

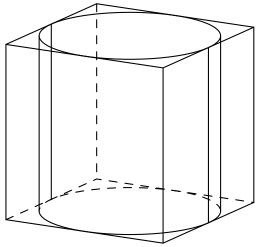
7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

8

8. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объём параллелепипеда равен 320. Найдите высоту цилиндра.



9

9. Радиус основания первого конуса в 3 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а высота первого конуса в 5 раз больше, чем высота второго. Чему равен объём первого конуса, если объём второго равен 18?

10

10. Металлический шар диаметром 60 см расплавили, для того чтобы изготовить шарики диаметром 12 см. Какое максимальное число таких шариков можно изготовить?

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы

Диагностическая работа 1

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 9. **3.** 7. **4.** 60. **5.** 188. **6.** 148. **7.** 6. **8.** 26.
Вариант 2. **1.** 6. **2.** 11. **3.** 8. **4.** 30. **5.** 344. **6.** 126. **7.** 24. **8.** 28.

Тренировочная работа 1

Вариант 1. **1.** 0,3. **2.** 0,5. **3.** 30. **4.** 0,6. **5.** 0,28. **6.** 30. **7.** 45. **8.** 30. **9.** 0,5. **10.** 90.
Вариант 2. **1.** 0,75. **2.** 5. **3.** 45. **4.** 0,75. **5.** 6. **6.** 45. **7.** 0,5. **8.** 60. **9.** 1,5. **10.** 1.

Тренировочная работа 2

Вариант 1. **1.** 0,9. **2.** 45. **3.** 45. **4.** 0,96. **5.** 20. **6.** 60. **7.** 2. **8.** 0,4. **9.** 6. **10.** 36.
Вариант 2. **1.** 0,2. **2.** 30. **3.** 30. **4.** 0,8. **5.** 30. **6.** 60. **7.** 0,5. **8.** 60. **9.** 3. **10.** 22,5.

Тренировочная работа 3

Вариант 1. **1.** 12. **2.** 68. **3.** 144. **4.** 3. **5.** 54. **6.** 62. **7.** 120. **8.** 360. **9.** 300. **10.** 4.
Вариант 2. **1.** 18. **2.** 62. **3.** 168. **4.** 32. **5.** 24. **6.** 346. **7.** 18. **8.** 60. **9.** 36. **10.** 9.

Тренировочная работа 4

Вариант 1. **1.** 18. **2.** 110. **3.** 114. **4.** 84. **5.** 7,5. **6.** 156. **7.** 54. **8.** 50. **9.** 3. **10.** 14.
Вариант 2. **1.** 76. **2.** 94. **3.** 132. **4.** 48. **5.** 71,5. **6.** 162. **7.** 30. **8.** 70. **9.** 3. **10.** 14.

Тренировочная работа 5

Вариант 1. **1.** 100. **2.** 20. **3.** 144. **4.** 3. **5.** 27. **6.** 135. **7.** 125. **8.** 150. **9.** 28. **10.** 100.
Вариант 2. **1.** 4,5. **2.** 36. **3.** 54. **4.** 54. **5.** 64. **6.** 168. **7.** 27. **8.** 900. **9.** 36. **10.** 192.

Диагностическая работа 2

Вариант 1. **1.** 30. **2.** 60. **3.** 6. **4.** 8. **5.** 45. **6.** 7,5. **7.** 13,5. **8.** 4.
Вариант 2. **1.** 60. **2.** 30. **3.** 14. **4.** 6. **5.** 60. **6.** 7. **7.** 37,5. **8.** 16.

Тренировочная работа 6

Вариант 1. **1.** 30. **2.** 45. **3.** 10. **4.** 0,7. **5.** 3. **6.** 60. **7.** 1. **8.** 17. **9.** 9. **10.** 8.
Вариант 2. **1.** 60. **2.** 60. **3.** 3. **4.** 0,7. **5.** 2. **6.** 90. **7.** 1. **8.** 7. **9.** 6. **10.** 13.

Тренировочная работа 7

Вариант 1. **1.** 60. **2.** 45. **3.** 90. **4.** 120. **5.** 45. **6.** 30. **7.** 30. **8.** 60. **9.** 60. **10.** 60.
Вариант 2. **1.** 60. **2.** 60. **3.** 60. **4.** 60. **5.** 60. **6.** 30. **7.** 60. **8.** 30. **9.** 45. **10.** 30.

Тренировочная работа 8

Вариант 1. **1.** 180. **2.** 75. **3.** 50. **4.** 84. **5.** 320. **6.** 96. **7.** 720. **8.** 24. **9.** 12. **10.** 504.
Вариант 2. **1.** 324. **2.** 12. **3.** 32. **4.** 340. **5.** 240. **6.** 144. **7.** 360. **8.** 54. **9.** 27. **10.** 288.

Тренировочная работа 9

Вариант 1. **1.** 5. **2.** 8. **3.** 9. **4.** 60. **5.** 54. **6.** 40,5. **7.** 121,5. **8.** 162. **9.** 150. **10.** 288.
Вариант 2. **1.** 4. **2.** 25. **3.** 15. **4.** 32. **5.** 98. **6.** 726. **7.** 4,5. **8.** 6. **9.** 56. **10.** 6.

Диагностическая работа 3

Вариант 1. **1.** 32. **2.** 1,2. **3.** 48. **4.** 300. **5.** 128. **6.** 44. **7.** 600. **8.** 26. **9.** 4. **10.** 27.
Вариант 2. **1.** 60. **2.** 1,1. **3.** 12. **4.** 288. **5.** 96. **6.** 28. **7.** 216. **8.** 28. **9.** 9. **10.** 512.

Тренировочная работа 10

Вариант 1. **1.** 15. **2.** 100. **3.** 10. **4.** 48. **5.** 56. **6.** 12. **7.** 2. **8.** 27. **9.** 3. **10.** 7.
Вариант 2. **1.** 10. **2.** 52. **3.** 8. **4.** 6. **5.** 12. **6.** 7. **7.** 5. **8.** 43. **9.** 5. **10.** 6.

Тренировочная работа 11

Вариант 1. **1.** 16. **2.** 7. **3.** 20. **4.** 15. **5.** 5. **6.** 6. **7.** 16. **8.** 8. **9.** 42. **10.** 12.
Вариант 2. **1.** 13. **2.** 4. **3.** 60. **4.** 10. **5.** 49. **6.** 21. **7.** 9. **8.** 5. **9.** 46. **10.** 32.

Тренировочная работа 12

Вариант 1. **1.** 98. **2.** 3. **3.** 10. **4.** 4. **5.** 2320. **6.** 50. **7.** 12. **8.** 72. **9.** 16. **10.** 100.
Вариант 2. **1.** 45. **2.** 8. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 2275. **6.** 16. **7.** 100. **8.** 576. **9.** 12. **10.** 12.

Тренировочная работа 13

Вариант 1. **1.** 3. **2.** 17. **3.** 6. **4.** 10. **5.** 3. **6.** 18. **7.** 28. **8.** 48. **9.** 4. **10.** 4.
Вариант 2. **1.** 12. **2.** 25. **3.** 5. **4.** 12. **5.** 7. **6.** 3. **7.** 32. **8.** 2. **9.** 2. **10.** 2.

Тренировочная работа 14

Вариант 1. **1.** 4. **2.** 321. **3.** 12. **4.** 180. **5.** 18. **6.** 26. **7.** 20. **8.** 36. **9.** 2,5. **10.** 18.
Вариант 2. **1.** 7. **2.** 154. **3.** 9. **4.** 112. **5.** 27. **6.** 42. **7.** 8. **8.** 8. **9.** 1,5. **10.** 375.

Тренировочная работа 15

Вариант 1. **1.** 12. **2.** 2. **3.** 18. **4.** 4. **5.** 126. **6.** 20. **7.** 2,56. **8.** 1,5. **9.** 4. **10.** 64.
Вариант 2 **1.** 33. **2.** 0,75. **3.** 4. **4.** 45. **5.** 31,5. **6.** 80. **7.** 1,44. **8.** 1,5. **9.** 27. **10.** 25.

Диагностическая работа 4

Вариант 1. **1.** 45. **2.** 45. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 64. **6.** 120. **7.** 45. **8.** 18. **9.** 10. **10.** 16.
Вариант 2. **1.** 90. **2.** 60. **3.** 8. **4.** 6. **5.** 125. **6.** 200. **7.** 60. **8.** 45. **9.** 90. **10.** 7.

Диагностическая работа 5

Вариант 1. **1.** 280. **2.** 1,5. **3.** 5. **4.** 37. **5.** 20. **6.** 52. **7.** 25. **8.** 10. **9.** 120. **10.** 8000.
Вариант 2. **1.** 216. **2.** 1,5. **3.** 12. **4.** 46. **5.** 80. **6.** 52. **7.** 9. **8.** 240. **9.** 15. **10.** 30.

Диагностическая работа 6

Вариант 1. **1.** 120. **2.** 1. **3.** 8. **4.** 16. **5.** 10,4. **6.** 140. **7.** 90. **8.** 8. **9.** 18. **10.** 42.
Вариант 2. **1.** 300. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 10. **5.** 21,6. **6.** 96. **7.** 60. **8.** 25. **9.** 5. **10.** 54.

Диагностическая работа 7

Вариант 1. **1.** 112. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 36. **5.** 216. **6.** 9. **7.** 3. **8.** 6. **9.** 54. **10.** 27.
Вариант 2. **1.** 78. **2.** 8. **3.** 3,5. **4.** 12. **5.** 64. **6.** 12. **7.** 6. **8.** 12. **9.** 48. **10.** 64.

Диагностическая работа 8

Вариант 1. **1.** 152. **2.** 45. **3.** 1. **4.** 26. **5.** 15. **6.** 12. **7.** 9. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 64.
Вариант 2. **1.** 132. **2.** 45. **3.** 1. **4.** 9. **5.** 18. **6.** 120. **7.** 8. **8.** 5. **9.** 10. **10.** 125.

Содержание