6
8
15

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019

Под редакцией
И. В. Ященко

А. В. Хачатурян

ЕГЭ 2019

8, 15
Базовый

6
Профильный

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ФГОС

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

МАТЕМАТИКА

А. В. Хачатурян

ЕГЭ 2019. Математика
Задачи по планиметрии

Задача 6 (профильный уровень)
Задачи 8 и 15 (базовый уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Х29

Хачатурян А. В.

Х29 ЕГЭ 2019. Математика. Задачи по планиметрии. Задача 6 (профильный уровень). Задачи 8 и 15 (базовый уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019. — 80 с.

ISBN 978-5-4439-1316-2

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2019. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2019 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2019.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль уровня основных арифметических навыков и умения решать геометрические задачи. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 07.08.2018 г. Формат 70 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 5. Тираж 3000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат».
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745–80–31. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 978-5-4439-1316-2

© Хачатурян А. В., 2019.
© МЦНМО, 2019.

От редактора серии

Прежде чем вы начнёте работать с тетрадями, дадим некоторые пояснения и советы.

Планируется, что в 2019 году у вас будет возможность выбрать уровень экзамена по математике — базовый или профильный. Вариант базового уровня будет состоять из 20 задач, проверяющих освоение Федерального государственного образовательного стандарта на базовом уровне.

Вариант ЕГЭ профильного уровня состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня сложности по основным темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9—12) и семь с развёрнутым ответом (задания 13—19).

Рабочие тетради организованы в соответствии со структурой экзамена и позволят вам подготовиться к выполнению всех заданий с кратким ответом, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Профильный уровень предназначен в первую очередь для тех, кому математика требуется при поступлении в вуз. Если вы ориентируетесь на этот уровень, то понимаете, что нужно уметь решать все задания с кратким ответом — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдёт меньше времени, чем на задание с развёрнутым решением; обидно терять баллы из-за ошибок в относительно простых задачах.

Кроме того, тренировка на простых задачах позволит вам избежать технических ошибок и при решении задач с полным решением.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической работы. Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с решениями, приведёнными в книге. Если какая-то задача или тема вызывает затруднения, следует после повторения материала выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, размещённые в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей для подготовки к ЕГЭ по математике позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического изучения математики.

Желаем успеха!

Введение

В данной брошюре рассматриваются задачи по планиметрии, предлагающиеся в базовом варианте Единого государственного экзамена (задачи № 8 и 15), а также в первой части профильного экзамена (задача № 6). Более сложной планиметрической задаче профильного экзамена — задаче № 16 — посвящена отдельная брошюра, однако стоит отметить, что задачи этого сборника могут рассматриваться как предварительный этап подготовки к решению задачи № 16 — лишь научившись без труда решать задачи из этой книжки, можно браться за подготовку к более сложным задачам.

Большинство задач, которые здесь предлагаются, несложны и решаются в один-два шага, однако применяемые факты и методы весьма разнообразны. Разнообразны и многочисленны и сами задачи. Фактически данный сборник призван охватить и проиллюстрировать на примерах основные теоремы и приёмы решения задач из курса планиметрии за 7—9 классы. Конечно, затронуть такой широкий материал в небольшой книжке можно только весьма бегло и поверхностно, поэтому наша брошюра ни в коей мере не заменит читателю ни школьный учебник, ни полноценный представительный задачник. Наша цель — повторить изученный материал, сконцентрировавшись на задачах ЕГЭ.

Некоторые задачи сборника отражают специфику задачи № 8 базового ЕГЭ и сформулированы как задачи практического содержания. Для их решения нужно смоделировать задачу на языке формальной геометрии и затем уже решить полученную планиметрическую задачу.

Сборник открывает диагностическая работа, и мы рекомендуем учащимся начать с неё для определения тех разделов, задачи из которых вызывают сложности. Задачи диагностической работы разбиты на тематические тройки.

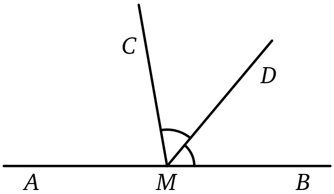
За диагностической работой следуют шесть небольших разделов, в которых подробно разбираются решения каждой тройки задач из диагностической работы, при необходимости даются другие примеры и нужный теоретический и методический материал. Каждый раздел завершается тремя тренировочными работами, при этом первые две базового уровня сложности (но вторая немного сложнее первой), а последняя — повышенного. Для достижения уверенного владения материалом мы рекомендуем учащимся, готовящимся к базовому экзамену, прорешать как минимум первую и вторую работы, тем же, кто готовится к профильному уровню, можно начать сразу с третьей, а если с ней будут трудности, решить первые две, а потом вернуться к третьей.

Завершают сборник четыре диагностические работы для итогового повторения. Они содержат задачи базового и профильного экзаменов, но сложных задач в них нет. Ко всем задачам тренировочных и итоговых работ приведены ответы.

Диагностическая работа 1

Ответы:

Д1.1. На прямой AB взята точка M, лежащая между A и B. Луч MD — биссектриса $\angle CMB$. Известно, что $\angle DMC = 55°$. Найдите $\angle CMA$. Ответ дайте в градусах.



Д1.1

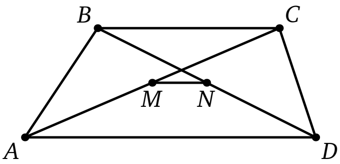
Д1.2. Один из углов прямоугольного треугольника равен 26°. Найдите угол между медианой и высотой этого треугольника, проведёнными к гипотенузе. Ответ дайте в градусах.

Д1.2

Д1.3. В треугольнике ABC известно, что $\angle ABC = 74°$. Биссектрисы AK и CN этого треугольника пересекаются в точке I. Найдите $\angle AIC$. Ответ дайте в градусах.

Д1.3

Д2.1. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 9$ и $BC = 5$. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

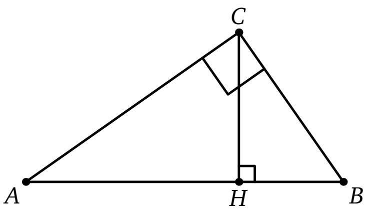


Д2.1

Д2.2. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 6$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите AB.

Д2.2

Д2.3. В треугольнике ABC с $\angle C = 90°$ гипотенуза $AB = 52$ и $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите длину высоты CH этого треугольника.



Д2.3

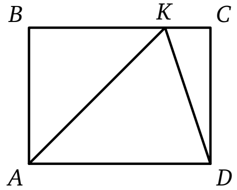
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

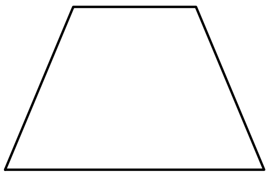
Д3.1

Д3.1. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ ($AB = 15$, $AD = 23$) отмечена точка K так, что треугольник AKB равнобедренный. Найдите DK.



Д3.2

Д3.2. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 19, боковая сторона 13. Найдите высоту трапеции.



Д3.3

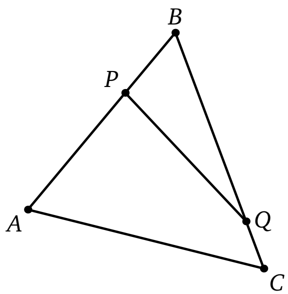
Д3.3. Найдите радиус описанной окружности треугольника, стороны которого равны 30, 39 и 39.

Д4.1

Д4.1. Все стороны трапеции, кроме её большего основания, равны 5. Косинус одного из углов трапеции равен 0,6. Найдите площадь трапеции.

Д4.2

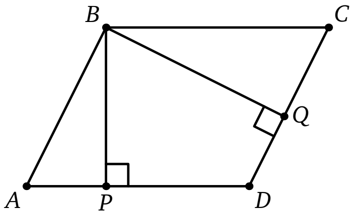
Д4.2. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки P и Q так, что $BP : PA = 1 : 2$ и $BQ : QC = 4 : 1$. Найдите отношение площади четырёхугольника $ACQP$ к площади треугольника PBQ.



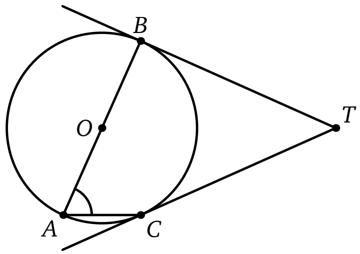
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Д4.3. На стороны AD и CD параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры BP и BQ соответственно. Найдите BQ, если $BP = 7$, $CD = 8$ и $BC = 9$.



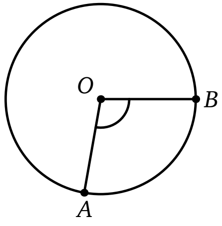
Д5.1. AB — диаметр окружности, TB и TC — касательные к ней. Найдите $\angle CTB$, если $\angle CAB = 66^\circ$. Ответ дайте в градусах.



Д5.2. К окружности радиуса 7 из точки P проведены касательные $PA = PB = 24$. Найдите длину хорды AB.

Д5.3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 5, 5 и 6.

Д6.1. Точки A и B делят окружность с центром O на две дуги, из которых бо́льшая в 2,6 раза длиннее меньшей. Найдите $\angle AOB$. Ответ дайте в градусах.



Ответы:

Д4.3

Д5.1

Д5.2

Д5.3

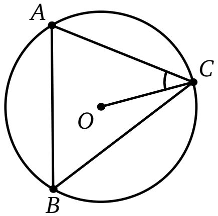
Д6.1

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

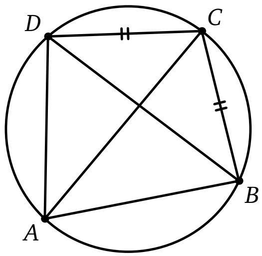
Д6.2

Д6.2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Найдите $\angle ABC$, если $\angle OCA = 37°$. Ответ дайте в градусах.



Д6.3

Д6.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём $BC = CD$. Известно, что $\angle ADC = 93°$. Найдите, под каким острым углом пересекаются диагонали этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вертикальные и смежные углы. Сумма углов треугольника. Решения задач Д1.1—Д1.3 диагностической работы 1

Решение простейших задач на нахождение величин углов основано в первую очередь на следующем *основном свойстве* измерения углов: если луч проходит внутри угла и разбивает его на два угла, то сумма их градусных мер равна градусной мере (величине) исходного угла.

Величина *развёрнутого* угла принимается равной 180°. Луч с началом в вершине развёрнутого угла разбивает его на два *смежных* угла, сумма градусных мер которых равна 180°. Равные смежные углы имеют величину 90° и называются *прямыми*. Два разных угла, смежные с одним и тем же углом, называются *вертикальными*. Вертикальные углы равны друг другу.

Решим задачу **Д1.1**. Луч MD является биссектрисой $\angle CMB$ и $\angle DMC = 55^\circ$, следовательно, и $\angle BMD = 55^\circ$. Тогда

$$\angle CMA = 180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ.$$

Ответ: 70.

Три угла треугольника можно расположить так, чтобы они в сумме составляли развёрнутый угол. Отсюда следует, что *сумма углов треугольника* равна 180°. Эта формула позволяет найти угол треугольника, зная два остальных.

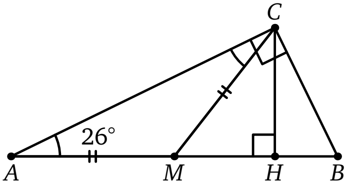
Внешний угол треугольника, смежный с одним из его внутренних углов, равен, таким образом, сумме двух остальных внутренних углов.

В прямоугольном треугольнике один из углов прямой, а в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Эти сведения позволяют найти все углы прямоугольного или же равнобедренного треугольника, зная только один его угол (при этом для равнобедренного треугольника и острого угла нужно дополнительно знать, это угол при вершине или же при основании).

Решим задачу **Д1.2**. Пусть ABC — данный треугольник (AB — гипотенуза) и $\angle A = 26^\circ$. Пусть также CM — его медиана, а CH — высота. Тогда по свойству прямоугольного треугольника $CM = MA = MB$, поэтому треугольник AMC равнобедренный и $\angle MAC = \angle MCA = 26^\circ$. Так как треугольник AHC

прямоугольный, $\angle HCA = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$, а

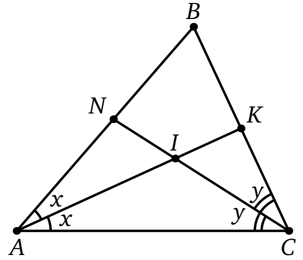
$$\angle HCM = \angle HCA - \angle MCA = 64^\circ - 26^\circ = 38^\circ.$$



Ответ: 38.

В отличие от предыдущей задачи, условия задачи **Д1.3** не позволяют найти все углы треугольника. Однако найти требуемый угол можно. В самом деле, пусть $\angle CAB = 2x$, а $\angle ACB = 2y$. Тогда $2x + 2y + 74^\circ = 180^\circ$, откуда $x + y = 53^\circ$. Далее из треугольника AIC находим

$$\angle AIC = 180^\circ - (\angle IAC + \angle ICA) = 180^\circ - (x + y) = 127^\circ.$$



Ответ: 127.

Ответ в этой задаче можно было бы получить ещё и таким способом. Предположим, что треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Тогда $\angle BAC = \angle CAB = \dfrac{180^\circ - 74^\circ}{2} = 53^\circ$ и, далее,

$$\angle ICA = \angle IAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 26{,}5^\circ,$$

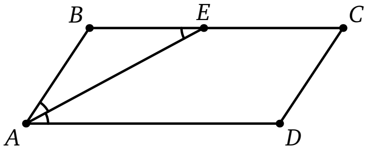
$$\angle AIC = 180^\circ - (\angle IAC + \angle ICA) = 180^\circ - 2 \cdot 26{,}5^\circ = 127^\circ.$$

Это, конечно, не решение, потому что мы рассмотрели частный случай, но подобным «нечестным» приёмом часто проще получить ответ. Можно рассуждать так: задача корректна, значит, ответ не зависит от вида треугольника, и этот ответ можно найти, рассмотрев любой удобный нам частный случай.

Приведём ещё пример несложной задачи, в которой требуется найти длину, но для решения понадобится рассуждение с углами.

В параллелограмме ABCD периметра 120 *биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E. Найдите CD, если* $EC = 22$.

Решение. Заметим, что $\angle EAB = \angle DAE = \angle AEB$, так что треугольник ABE равнобедренный, $AB = BE$. Если $AB = x$, то и $CD = x$, а $AD = BC = x + 22$. Поэтому $120 = 44 + 4x$, откуда $x = 19$.



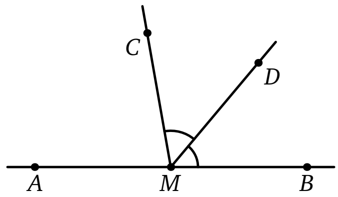
Ответ: 19.

Ответы:

Тренировочная работа 1А

1

1. На прямой AB взята точка M, лежащая между A и B. Луч MD — биссектриса $\angle CMB$. Известно, что $\angle CMA = 55°$. Найдите $\angle DMC$. Ответ дайте в градусах.

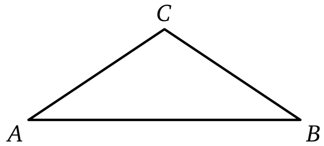


2

2. Две прямые при пересечении образуют четыре угла. Один из этих углов в четыре раза больше другого. Найдите его величину. Ответ дайте в градусах.

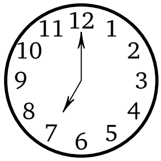
3

3. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $\angle A = 27°$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.



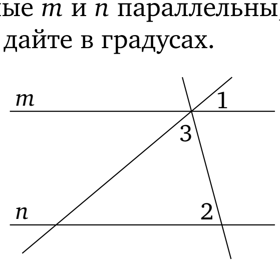
4

4. Какой наименьший угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелка в $7:00$?



5

5. На рисунке прямые m и n параллельны, $\angle 1 = 32°$, $\angle 2 = 77°$. Найдите $\angle 3$. Ответ дайте в градусах.

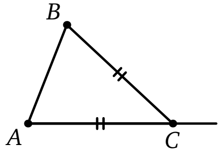


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

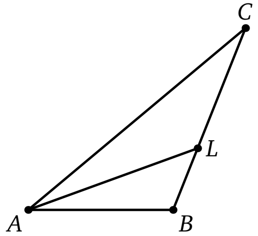
Ответы:

6. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$. Внешний угол при вершине C равен $137°$. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



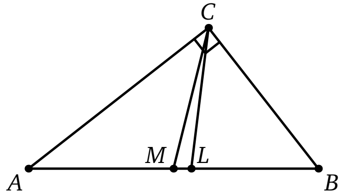
6

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Известно, что $\angle ACB = 30°$ и $\angle BAL = 22°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



7

8. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ из вершины прямого угла проведены биссектриса CL и медиана CM. Известно, что $\angle ABC = 52°$. Найдите $\angle MCL$. Ответ дайте в градусах.



8

Образец написания:

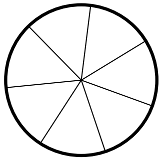
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 1Б

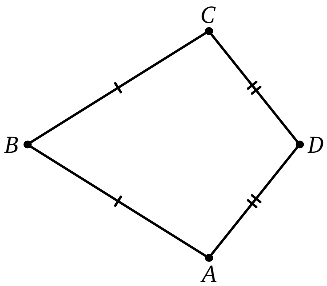
1

1. На рисунке изображено колесо с семью спицами. Сколько спиц будет в колесе, если угол между соседними спицами в нём будет равен 20°?



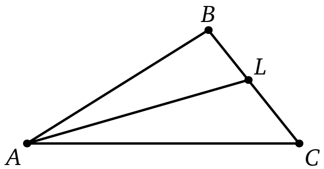
2

2. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$ и $AD = DC$, $\angle ABC = 57^\circ$, а $\angle ADC = 141^\circ$. Найдите $\angle BCD$. Ответ дайте в градусах.



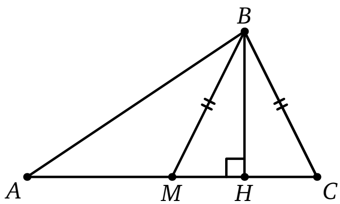
3

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Известно, что $\angle ALC = 130^\circ$, а $\angle ABC = 103^\circ$. Найдите $\angle ACB$. Ответ дайте в градусах.



4

4. В треугольнике ABC, в котором $AC = 56$, проведены медиана BM и высота BH. Известно, что $BM = BC$. Найдите AH.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

5. Один из углов треугольника равен 43°, а другой 57°. Найдите величину острого угла между высотами треугольника, проведёнными из вершин указанных углов. Ответ дайте в градусах.

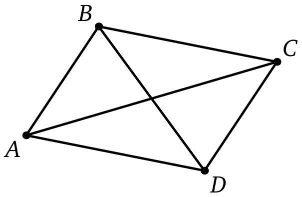
5

6. Найдите величину тупого угла между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

6

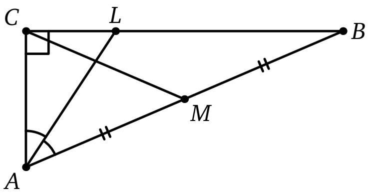
7. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ вдвое длиннее его стороны AB. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если $\angle ACD = 40^\circ$. Ответ дайте в градусах.

7



8. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$ и $\angle B = 24^\circ$. Найдите острый угол между его медианой CM и биссектрисой AL. Ответ дайте в градусах.

8



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

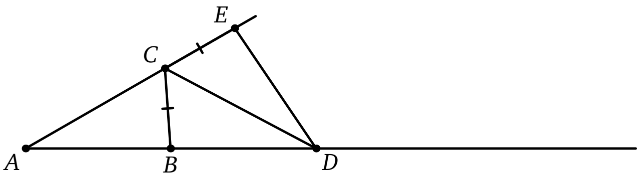
4

Тренировочная работа 1В

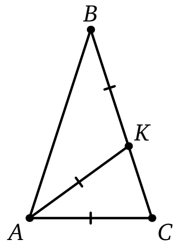
1. Наименьший угол равнобедренного треугольника равен 40°. Найдите (в градусах) его наибольший угол. Если задача имеет несколько решений, в ответе запишите их сумму.

2. Угол между биссектрисой и высотой прямоугольного треугольника, опущенными на гипотенузу, равен 9°. Во сколько раз больший острый угол этого треугольника превосходит меньший?

3. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 86^\circ$. CD — биссектриса внешнего угла при вершине C, причём D лежит на прямой AB. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка E так, что $CB = CE$. Найдите $\angle ADE$. Ответ дайте в градусах.



4. На боковой стороне CB равнобедренного ($AB = BC$) треугольника ABC выбрана точка K. Оказалось, что $CA = AK = KB$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.

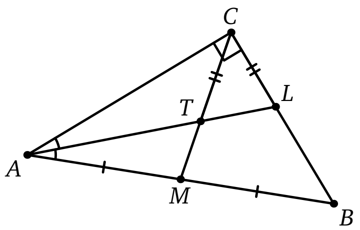


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

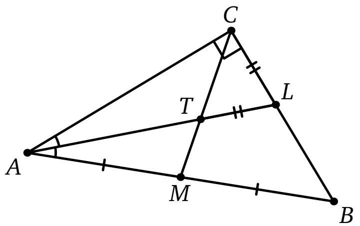
Ответы:

5. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, а медиана CM и биссектриса AL пересекаются в точке T, причём $CT = CL$. Найдите наибольший острый угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.



5

6. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, а медиана CM и биссектриса AL пересекаются в точке T, причём $LT = CL$. Найдите наибольший острый угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.

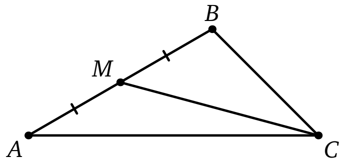


6

7. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AP = AC$ и $BQ = BC$. Найдите $\angle PCQ$. Ответ дайте в градусах.

7

8. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 30°$ и $\angle B = 105°$, проведена медиана CM. Найдите $\angle MCA$. Ответ дайте в градусах.



8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Пропорциональные отрезки. Подобие. Решение прямоугольных треугольников. Решения задач Д2.1—Д2.3 диагностической работы 1

В этом разделе мы собрали задачи, решение которых так или иначе основано на подобии треугольников. Чтобы повторить теорию вопроса, вспомним сначала, что *у любого параллелограмма противоположные стороны равны*, а его *диагонали пересекаются в своей общей середине*.

Свойства параллелограмма используются при доказательстве *теоремы Фалеса*.

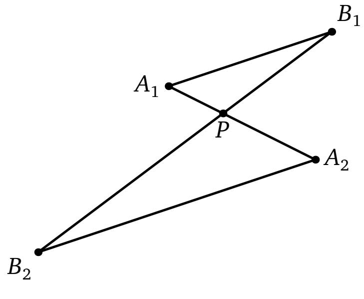
Если несколько параллельных прямых пересекают две прямые и на одной из них высекают равные отрезки, то они высекают равные отрезки и на второй прямой.

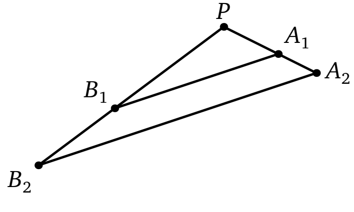
У этой теоремы есть несколько обобщений, среди которых наиболее важным для практического решения задач нам кажется такая *теорема о пропорциональных отрезках*.

Пусть две прямые пересекаются в точке P, на одной прямой отмечены точки A_1 и A_2, а на другой — точки B_1 и B_2, причём $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Тогда

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PB_1}{PB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$

Теореме отвечают две возможные конфигурации (см. рисунок). В основе каждой из них можно видеть *трапецию* $A_1B_1A_2B_2$ ($A_1B_1B_2A_2$), у которой либо диагонали, либо продолжения боковых сторон пересекаются в точке P (в первом случае на месте трапеции может оказаться параллелограмм).



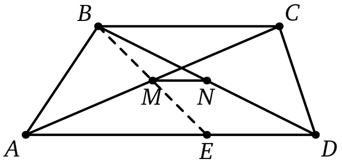


У треугольников PA_1B_1 и PA_2B_2 в условиях теоремы равны соответствующие углы, такие треугольники называются *подобными*. Можно показать, что любую пару подобных треугольников можно расположить на двух прямых — так, как расположены треугольники на левой конфигурации, — и потому *для любой пары подобных треугольников* $A_1B_1C_1$ *и* $A_2B_2C_2$ *выполняется соотношение*

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}.$$

Из этой теоремы (и обратной ей) вытекают хорошо известные свойства *средней линии* треугольника и трапеции.

Средняя линия треугольника (*трапеции*) *параллельна его основанию* (*её основаниям*) *и равна его половине* (*их полусумме*).



Разберём задачу **Д2.1**. Продлим BM до пересечения с основанием AD в точке E. Из подобия треугольников AME и CMB следует, что $1 = \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{ME} = \frac{BC}{EA}$, а поэтому $MB = ME$ и $EA = BC = 5$. Значит, $ED = 9 - 5 = 4$. Тогда MN — средняя линия в треугольнике EBD и $MN = \frac{1}{2}ED = 2$.

Ответ: 2.

Ясно, что все прямоугольные треугольники с одинаковым острым углом подобны. Пусть, например, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ прямоугольные ($\angle C = \angle C_1 = 90°$) и, кроме того, $\angle A = \angle A_1 = \alpha$. Тогда из подобия $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, а отсюда $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$. Последнее равенство означает, что в любом прямоугольном треугольнике с острым углом α отношение сторон, заключающих этот угол (катета и гипотенузы), не зависит от выбора треугольника, а зависит только от самого угла. Это отношение — очень важная функция величины угла, оно называется *косинусом* этого угла: $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$. Аналогично доказывается, что только от угла зависят его *синус* $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$ и *тангенс* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$. Эти функции угла называются *тригонометрическими*.

Тригонометрические функции помогают найти одни элементы прямоугольного треугольника по другим (как говорят, решить прямоугольный треугольник).

Разберём задачу **Д2.2**. По определению $\cos A = 0{,}6 = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{AB}$, откуда $AB = 10$.

Ответ: 10.

Однако не всегда вычисление будет таким простым. Модифицируем немного нашу задачу.

В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 6$, $\sin A = 0{,}6$. *Найдите AB.*

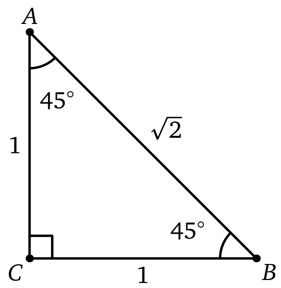
Решение. Узнав $\cos A$, мы сведём задачу к предыдущей. Сделать это можно с помощью формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, которую иногда называют *основным тригонометрическим тождеством*. Эта формула — не что иное, как *теорема Пифагора*, про которую мы будем подробно говорить в следующем разделе.

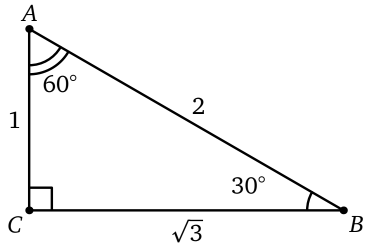
Итак, $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-(0{,}6)^2} = 0{,}8$. Далее легко: $AB = \dfrac{AC}{\cos A} = 7{,}5$.

Можно решать и непосредственно по теореме Пифагора: раз $\sin A = 0{,}6 = \dfrac{3}{5}$, значит, $BC = 3x$ и $AB = 5x$. Тогда $36 + 9x^2 = 25x^2$, то есть $36 = 16x^2$, откуда $x = \dfrac{3}{2}$ и $AB = 5x = 5\cdot\dfrac{3}{2} = 7{,}5$.

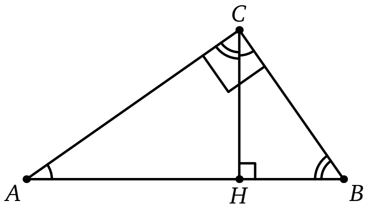
Ответ: 7,5.

Тригонометрические функции углов обычно вычислить непросто, но для угла 45°, а также углов 30° и 60° соотношения длин сторон соответствующих треугольников несложно найти и разумно запомнить (см. рисунок).





Часто встречается и конструкция, когда в прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AB опущена высота CH. Эта высота делит треугольник на два треугольника, которые подобны друг другу и исходному треугольнику.



Выписывая равенства отношений сторон, можно получить ряд соотношений, среди которых есть достаточно «симметричные», такие как $CH^2 = AH \cdot BH$ и $CH \cdot AB = AC \cdot BC$.

Второе соотношение можно также понимать как удвоенную площадь треугольника, вычисленную двумя способами. Мы ещё будем про это говорить в разделе о площадях.

Разберём задачу **Д2.3**.

Можно действовать методом, подобным применённому в предыдущей задаче. Раз $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$, положим $AC = 3x$ и $BC = 2x$. Тогда $4x^2 + 9x^2 = 52^2$, откуда $x = 4\sqrt{13}$. Из формулы $CH \cdot AB = AC \cdot BC$ найдём $CH = \frac{12\sqrt{13} \cdot 8\sqrt{13}}{52} = 24$.

Ответ: 24.

Можно поступить иначе. Угол A есть не только в треугольнике ABC, но и в треугольнике ACH. Положим $AH = 3x$ и $CH = 2x$. Тогда из соотношения $CH^2 = AH \cdot BH$ найдём

$$BH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{4x^2}{3x} = \frac{4}{3}x.$$

Теперь из равенства $3x + \frac{4}{3}x = 52$ находим $x = 12$, а тогда $CH = 2x = 24$.

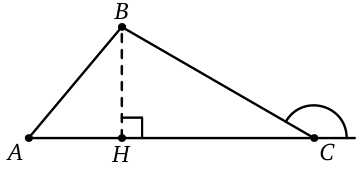
Проведение высоты помогает в расчётах не только в прямоугольном треугольнике. Покажем это на примере такой задачи.

В треугольнике ABC известно, что $\sin A = \frac{2}{3}$, $BC = 12$ *и внешний угол при вершине C равен* 150°. *Найдите AB.*

Решение. Проведём высоту BH. Ясно, что

$$\angle C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Так как $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, получаем, что $BH = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$. Далее, $\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{3}$, откуда $AB = \frac{3}{2}BH = 9$.



Ответ: 9.

Это рассуждение по сути использует хорошо известное следствие из *теоремы синусов*: $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin A}{\sin C}$.

Ответы:

1

2

3

4

5

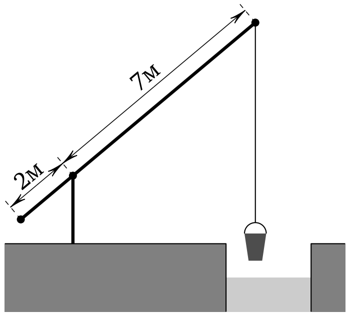
6

7

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

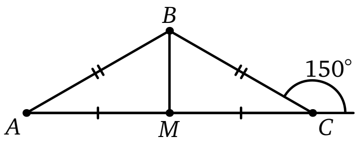
Тренировочная работа 2А

1. На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 2 м, а длинное — 7 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, если конец короткого поднимется на метр?



2. Найдите длину самой длинной из средних линий прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8.

3. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 18$. Внешний угол при вершине C равен 150°. Найдите длину медианы BM этого треугольника.



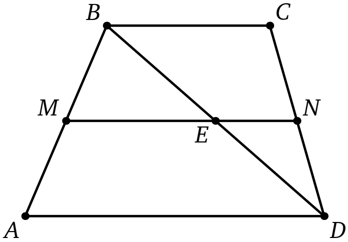
4. В прямоугольном ($\angle C = 90°$) треугольнике ABC известно, что $AC = 4$ и $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{33}}{4}$. Найдите AB.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите синус наименьшего острого угла этого треугольника.

6. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} A = 0{,}2$ и $AB = 13$. На гипотенузу опущена высота CH. Найдите HA.

7. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, AH — высота, $AB = 20$, $\cos\angle BAC = 0{,}25$. Найдите HB.

8. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 11$ и $BC = 6$. Найдите длину большего из отрезков, на которые средняя линия MN трапеции делится её диагональю BD.



Ответы:

8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

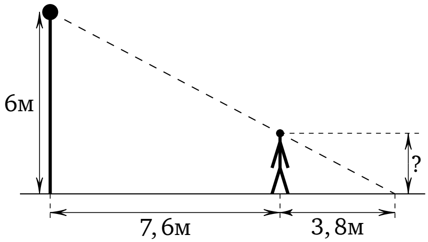
8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 2Б

1. Человек стоит на расстоянии 7,6 м от столба, на котором на высоте 6 м висит фонарь. Длина тени человека 3,8 м. Каков рост человека (в метрах)?



2. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 20$, $AC = 24$. Найдите $\sin A$.

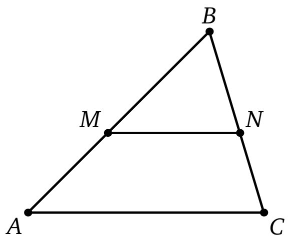
3. В прямоугольном ($\angle C = 90^\circ$) треугольнике ABC известно, что $BC = 2$ и $\cos A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите AC.

4. Тангенс одного из углов прямоугольного треугольника равен $\frac{4}{3}$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 9. Найдите длину гипотенузы.

5. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, AH — высота, $AB = 20$, $\cos\angle BAC = 0{,}25$. Найдите HC.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 13 и 29, высота равна 11. Найдите тангенс острого угла при основании трапеции.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AC$. Найдите AC, если $NB = 5$, $NC = 4$ и $NM = 7$.



8. Средняя линия трапеции равна 13, одно из оснований равно 8. Найдите другое основание.

Тренировочная работа 2В

Ответы:

1. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AD = 21$, $AB = 3$, $\sin A = \frac{6}{7}$. Найдите длину наибольшей высоты параллелограмма.

1

2. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13, а высота, опущенная на неё, равна 6. Найдите тангенс наибольшего острого угла этого треугольника.

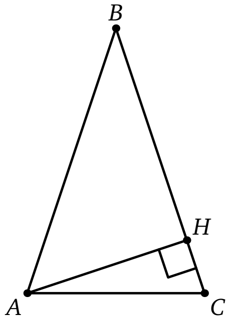
2

3. Синус одного из углов прямоугольного треугольника равен $\frac{5}{13}$, а периметр этого треугольника равен 390. Найдите длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

3

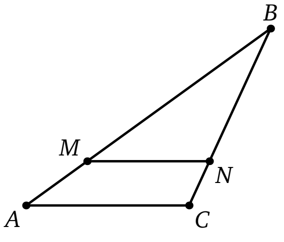
4. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC = 5$ и $AC = \sqrt{10}$, проведена высота AH. Найдите HC.

4



5. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AC$. Найдите AC, если $NM = 9$, $NC = 4$ и $NB = AC$.

5



6. В треугольнике ABC известно, что $AC = 5\sqrt{5}$, $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$. Найдите AB.

6

Образец написания:

1234567890-,

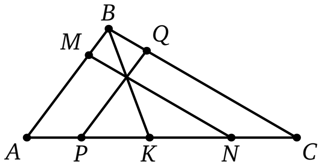
Ответы:

7

8

7. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, а $\angle CAB = 2\angle ACB$. Найдите длину биссектрисы AL этого треугольника.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и Q, а на стороне AC — точки P, K, N (именно в таком порядке, считая от A) таким образом, что $MN \parallel BC$, $PQ \parallel AB$ и KB проходит через точку пересечения MN и PQ. Известно, что $AP = 4$, $PK = 5$ и $KN = 6$. Найдите NC.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Вокруг теоремы Пифагора. Решения задач Д3.1—Д3.3 диагностической работы 1

В вычислениях в планиметрии *теорема Пифагора* играет ключевую роль. Мы упоминали её в предыдущем разделе о подобии треугольников, ей целиком посвящён настоящий раздел, она будет нужна и в последующих разделах — в задачах о касательных, в задачах о площадях фигур и т. д.

Теорема Пифагора утверждает, что

во всяком прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Справедливо и обратное: если в каком-то треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других, то этот треугольник прямоугольный (а наибольшая сторона — гипотенуза).

Бывает, что все стороны прямоугольного треугольника имеют целые длины — такие наборы целых чисел называются *пифагоровыми тройками*. Простейшая такая тройка — 3, 4, 5 ($3^2+4^2=5^2$), эти числа очень часто встречаются в задачах (это обстоятельство отчасти вызвано тем техническим требованием, что задача ЕГЭ должна иметь рациональный ответ). Треугольник с такими сторонами иногда называют «*египетским*». Полезно «знать в лицо» не только этот треугольник, но и подобные ему (со сторонами 6, 8, 10 или 9, 12, 15 и так далее). Существуют и другие пифагоровы тройки, например 5, 12, 13 или 8, 15, 17. Различных (не пропорциональных друг другу) пифагоровых троек бесконечно много.

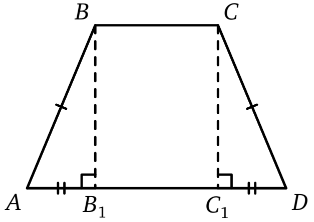
Разберём задачу **Д3.1**. У равнобедренного треугольника AKB есть прямой угол ($\angle B$), который непременно будет углом при вершине. Значит, $AB=BK=15$ и $KC=23-15=8$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику CDK, находим $KD=\sqrt{8^2+15^2}=17$. (Если «узнать» соответствующую пифагорову тройку, можно ничего не вычислять.)

Ответ: 17.

Разберём задачу **Д3.2**. Прямых углов в условии задачи нет, но их несложно построить. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD=19$, $BC=9$ и $AB=CD=13$. Опустим из вершин B и C высоты BB_1 и CC_1. Прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 равны по катету и гипотенузе. Значит,

$$AB_1=DC_1=\frac{AD-B_1C_1}{2}=\frac{AD-BC}{2}=5.$$

Теперь находим $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (или опять же угадываем ответ, увидев знакомую пифагорову тройку).



Ответ: 12.

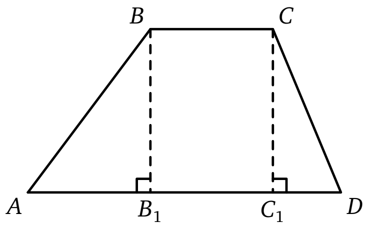
Это решение, конечно, существенно использует равнобедренность трапеции, однако тот же приём поможет найти высоту и в общем случае — правда, технически это будет сделать сложнее. Попробуем изменить числа в задаче, сделав боковые стороны трапеции различными.

Основания трапеции равны 9 *и* 24*, боковые стороны* 13 *и* 14*. Найдите высоту трапеции.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = 24$, $BC = 9$, $AB = 14$ и $CD = 13$. Точно так же опустим из вершин B и C высоты BB_1 и CC_1. Заметим, что основание высоты C_1 не может попасть на продолжение луча AD за точку D, ведь $AC_1 < AB + BC < AD$. Аналогичные рассуждения верны для точки B_1, поэтому обе точки B_1 и C_1 лежат на отрезке AD. Прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 равны уже не будут, но можно обозначить $AB_1 = x$, и тогда $C_1D = 24 - 9 - x = 15 - x$. Теперь применяем теорему Пифагора к обоим треугольникам:

$$14^2 - x^2 = BB_1^2 = CC_1^2 = 13^2 - (15 - x)^2.$$

После упрощения получим $30x = 15^2 + 14^2 - 13^2$, откуда $x = 8{,}4$. Тогда $BB_1 = \sqrt{14^2 - 8{,}4^2} = 11{,}2$.



Ответ: 11,2.

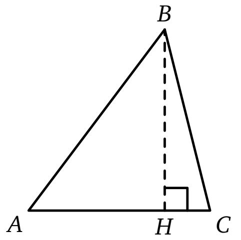
Эта техника работает и при отыскании высоты треугольника. Приведём пример.

В треугольнике ABC известно, что $AB=5$, $AC=4$ и $BC=\sqrt{17}$. Найдите $\sin A$.

Решение. Фактически надо найти высоту BH (потому что $\sin A=\frac{BH}{5}$). Обозначим $AH=x$ и $CH=|4-x|$. Применим дважды теорему Пифагора:

$$25-x^2=17-(4-x)^2.$$

Решая, получим $x=3$. Тогда $BH=\sqrt{25-9}=4$ и $\sin A=\frac{4}{5}$.



Ответ: 0,8.

Мы применили рассуждение, использующееся при выводе *теоремы косинусов*. Конечно, нашу задачу можно было бы решить и непосредственным применением этой теоремы:

$$17=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cdot\cos A,$$

откуда

$$\cos A=\frac{25+16-17}{40}=0{,}6,\quad \text{а}\quad \sin A=\sqrt{1-0{,}6^2}=0{,}8.$$

Разберём задачу **ДЗ.3**. Пусть ABC — данный треугольник,

$$AB=BC=39\quad \text{и}\quad AC=30.$$

Пусть M — середина основания; центр O описанной окружности лежит на отрезке BM, поскольку угол ABC лежит против меньшей стороны треугольника, а значит, он острый. Сначала найдём BM:

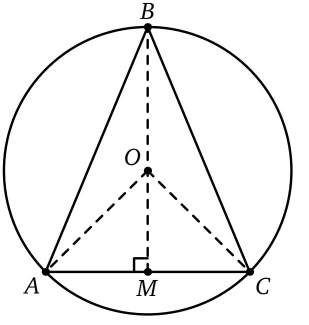
$$BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{39^2-15^2}=\sqrt{(39-15)(39+15)}=36.$$

Теперь примем радиус окружности за R и запишем теорему Пифагора для треугольника AOM:

$$R^2=15^2+(36-R)^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$R = \frac{15^2 + 36^2}{72} = \frac{5^2 + 12^2}{8} = 21{,}125.$$



Ответ: 21,125.

Есть одна тонкость — если бы наш треугольник был тупоугольным, то точка O лежала бы не на отрезке BM, а на его продолжении за M. Но решение от этого не изменится: просто выражение $(36 - R)^2$ заменится на равное ему $(R - 36)^2$. Однако иногда разница между тупоугольным и остроугольным треугольником оказывается существенной, и совсем не принимать её во внимание было бы ошибкой.

Эту задачу также можно было бы решить «без всякой геометрии», одними вычислениями. В самом деле, теорема косинусов позволит найти косинус угла при вершине:

$$30^2 = 2 \cdot 39^2 - 2 \cdot 39^2 \cdot \cos B,$$

откуда $\cos B = \frac{119}{169}$. Потом находим синус этого угла:

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{120}{169}.$$

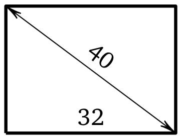
Далее применяем *теорему синусов*:

$$R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{169}{8}.$$

Можно немножко «схитрить» и вместо сложного вычисления косинуса угла при вершине по теореме косинусов найти геометрически косинус угла при основании: $\cos A = \frac{AM}{AB} = \frac{5}{13}$, а потом найти синус и радиус, как в предыдущем рассуждении. Это «синтетическое» решение, возможно, было бы наиболее простым.

Тренировочная работа 3А

1. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 40 дюймам, а ширина экрана — 32 дюймам. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в дюймах.



2. В треугольнике ABC известно, что $AB=BC=25$, $AC=14$. Найдите длину медианы BM этого треугольника.

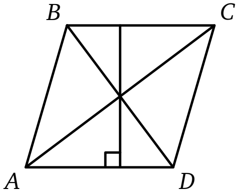
3. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ известно, что $AB=3$, $BC=4$, $CD=3\sqrt{10}$ и $\angle A=90°$. Найдите AD.

4. Сторона ромба равна 25, а одна из диагоналей равна 30. Чему равна другая диагональ?

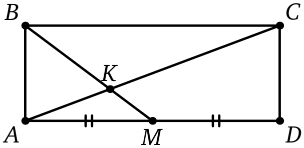
5. Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65, а боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

6. Диагональ прямоугольника в полтора раза длиннее одной из его сторон. Другая сторона прямоугольника равна $3\sqrt{5}$. Какова длина диагонали?

7. Диагонали ромба относятся как $3:4$, а периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



8. Стороны прямоугольника $AB=9$ и $BC=24$. Точка M — середина стороны DA. Отрезки AC и MB пересекаются в точке K. Найдите BK.



Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

Образец написания: 1234567890–,

Ответы:

1

2

3

4

5

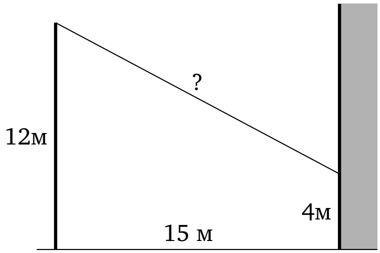
6

Образец написания:

1234567890–,

Тренировочная работа 3Б

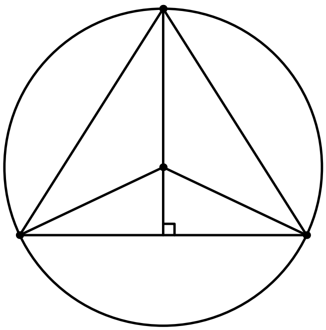
1. От столба высотой 12 м к дому протянут провод, который крепится на высоте 4 м над землёй. Расстояние от дома до столба равно 15 м. Найдите длину провода. Ответ дайте в метрах.



2. Диагонали ромба равны 24 и 70. Найдите периметр ромба.

3. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 8, боковая сторона равна 4. Найдите диагональ трапеции.

4. В окружность радиуса 7 вписан равнобедренный треугольник с основанием $4\sqrt{10}$. Центр окружности лежит внутри треугольника. Найдите высоту этого треугольника, проведённую к основанию.

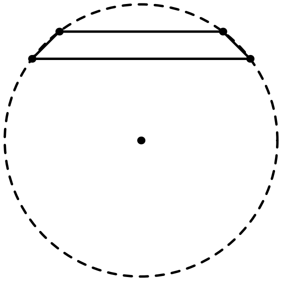


5. Основания равнобедренной трапеции равны 1 и 43, а синус острого угла трапеции равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите длину боковой стороны.

6. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{26}$, а боковая сторона равна 13. Найдите длину высоты, проведённой к боковой стороне.

Ответы:

7. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 8, а радиус описанной вокруг неё окружности равен 5. Центр окружности лежит вне трапеции. Найдите высоту трапеции.



7

8. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найдите периметр этого треугольника.

8

Образец написания:

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

Образец написания:

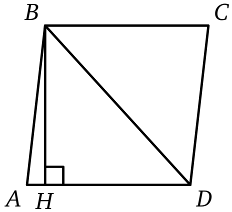
1234567890-,

Тренировочная работа 3В

1. Боковые стороны прямоугольной трапеции равны $2\sqrt{6}$ и 7. На сколько большее основание длиннее меньшего?

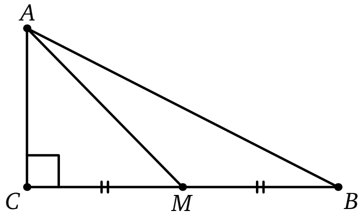
2. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 21$ и $BC = 5$. Боковая сторона $AB = 6$. Найдите CD, если $\angle DAB = 60°$.

3. Высота BH ромба $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 1$ и $HD = 8$. Найдите BD.



4. Трапеция с основаниями 10 и 14 и высотой 6 вписана в круг. Найдите площадь S этого круга. В ответе запишите число $\frac{S}{\pi}$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 5$, медиана $AM = 7$. Найдите гипотенузу AB.



6. Обе диагонали трапеции с основаниями 7 и 10 равны по 9,5. Найдите периметр этой трапеции.

7. Медианы прямоугольного треугольника, проведённые к катетам, равны $2\sqrt{13}$ и $\sqrt{73}$. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.

8. Косинусы двух углов треугольника равны по 0,625. Найдите косинус третьего угла.

Площади. Решения задач Д4.1—Д4.3 диагностической работы 1

Площадь — важная числовая характеристика геометрической фигуры, ключевым свойством которой является аддитивность — площадь фигуры равна сумме площадей частей, на которые фигура разделена. Площадь измеряется в квадратных единицах длины, площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. Фигуры, имеющие равные площади, называют *равновеликими*.

Задачи на нахождение площадей многоугольников, равно как и задачи с использованием площадей, встречаются в экзаменационной практике довольно часто. В простейших случаях для решения достаточно применения формул. Напомним их.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S=ab$.

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, опущенную на эту сторону: $S=ah_a$.

Площадь ромба может быть найдена как площадь любого параллелограмма, но также равна половине произведения его диагоналей: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$.

Площадь треугольника обычно вычисляется как половина произведения стороны на соответствующую высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Могут оказаться полезными и другие формулы:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C, \quad S = \frac{abc}{4R}$$

(R — радиус описанной окружности),

$$S = pr$$

(p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности),

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Последняя формула называется *формулой Герона*.

Площадь трапеции равна произведению её высоты на полусумму оснований: $S=\frac{a+b}{2}h$.

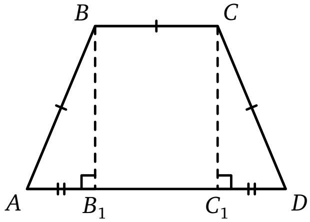
Этих сведений вполне достаточно для решения несложных задач.

Разберём задачу **Д4.1**. Пусть AD — большее основание. Как и при решении задачи **Д3.2**, опустим высоты BB_1 и CC_1 на AD. Косинус угла, упомянутого в условии, положителен, то есть это острый угол ($\angle A$ или $\angle D$). Из соотношения

$$\cos A = 0{,}6 = \frac{AB_1}{5}$$

находим $AB_1 = C_1D = 3$. Тогда $AD = 3 + 5 + 3 = 11$. Осталось найти высоту по теореме Пифагора ($BB_1 = \sqrt{25-9} = 4$) и искомую площадь:

$$S = BB_1 \cdot \frac{AD+BC}{2} = 32.$$



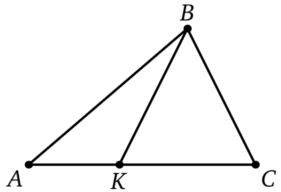
Ответ: 32.

Многие на первый взгляд сложные задачи очень просто решаются с помощью соображений, связанных с отношением площадей. Укажем два очевидных, но очень важных факта.

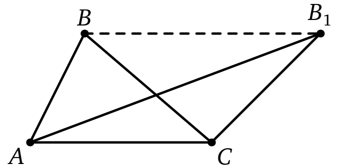
Площади двух треугольников **с одинаковой высотой** *относятся как их основания*. В частности, если на стороне AC треугольника ABC взять любую точку K, то

$$\frac{S_{\triangle AKB}}{s_{\triangle CKB}} = \frac{AK}{KC}.$$

Из этого следует, например, что медиана делит треугольник на две равновеликие части.



Площади двух треугольников **с одинаковым основанием** *относятся как их высоты*. В частности, если вершину B треугольника ABC передвинуть параллельно AC в точку B_1, то площадь треугольника не изменится: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C}$.

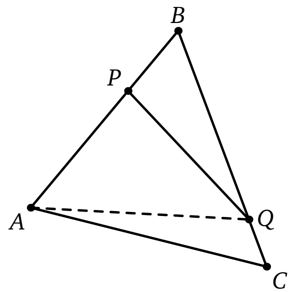


Разберём теперь задачу **Д4.2**. Проведём отрезок AQ. Так как $BQ : QC = 4 : 1$, получаем, что $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}} = \frac{4}{1}$, то есть $S_{\triangle ABQ} = \frac{4}{5}S$, где S — площадь треугольника ABC. Аналогично

$$S_{\triangle BQP} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}S = \frac{4}{15}S.$$

Значит,

$$S_{\triangle APQC} = \frac{11}{15}S.$$



Ответ: $\frac{11}{4} = 2{,}75$.

Заметим, что в этой задаче нам не пришлось находить сами площади (да и в условии ничего не было сказано про длины сторон, про высоты и пр.), достаточно было только найти их соотношение.

В задаче **Д4.3** площадь вообще не упоминается. Однако задачу легко решить, используя это понятие. В самом деле, площадь параллелограмма $ABCD$, с одной стороны, равна $BP \cdot AD = 63$, с другой стороны, $BQ \cdot DC = BQ \cdot 8$. Отсюда $BQ = \frac{63}{8}$.

Ответ: 7,875.

Рассуждения такого рода, когда результат достигается сравнением площади одной и той же фигуры, вычисленной двумя способами, иногда называют *методом площадей*. Подсчитывая площадь двумя способами, можно также установить, что произведение высоты треугольника на соответствующую сторону не зависит от выбора стороны, вывести уже встречавшуюся нам ранее формулу $hc = ab$ для прямоугольного треугольника и некоторые другие соотношения. Метод площадей будет применяться и в следующем разделе для вычисления радиуса вписанной окружности.

Решим в заключение такую задачу.

Стороны треугольника равны 13, 14 *и* 15. *Найдите длину самой короткой высоты этого треугольника.*

Решение. Конечно, можно выбрать одну из высот, провести её, дважды применить теорему Пифагора и найти её длину, потом так же найти остальные две высоты и выбрать самую короткую из трёх. Но это сложный и долгий путь. Гораздо проще применить метод площадей. Так как произведение высоты на сторону постоянно, понятно, что самая короткая высота проведена к самой длинной стороне 15. Если h — длина высоты, то площадь треугольника $S = \frac{15h}{2}$. С другой стороны, площадь несложно вычислить по формуле Герона:

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21,$$

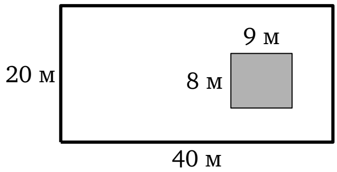
$$S = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = 84.$$

Приравниваем значения для площади и находим $h = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11{,}2$.

Ответ: 11,2.

Тренировочная работа 4А

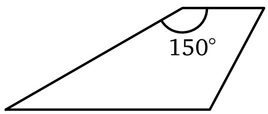
1. Дачный участок имеет форму прямоугольника размерами 20 м × 40 м. Дом, стоящий на участке, также имеет форму прямоугольника 8 м × 9 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Дайте ответ в квадратных метрах.



2. Квартира состоит из двух комнат, кухни, коридора и санузла (см. чертёж). Кухня имеет размеры 3,5 м × 3,5 м, вторая комната 3,5 м × 4 м, санузел 1,5 м × 1,5 м. Длина коридора составляет 11 м. Найдите площадь первой комнаты. Ответ дайте в квадратных метрах.

3. Диагональ квадрата равна 11. Чему равна площадь квадрата?

4. Основания трапеции равны 2 и 5. Боковая сторона, также равная 5, образует с одним из оснований угол 150°. Найдите площадь трапеции.



5. Медиана треугольника равна 5 и является также его биссектрисой. Площадь треугольника равна $10\sqrt{6}$. Найдите наименьшую сторону треугольника.

Ответы:

1

2

3

4

5

Образец написания:

1234567890–,

Ответы:

6

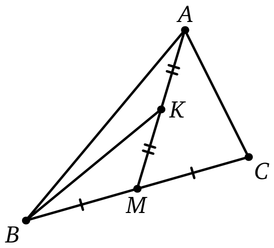
7

8

6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30°.

7. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а площадь равна 40. Каков периметр трапеции?

8. Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Площадь треугольника BMK равна 12. Найдите площадь треугольника ABC.



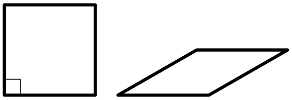
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Тренировочная работа 4Б

1. Квадрат площадью 11 и ромб с углом 30° имеют равные стороны. Какова площадь ромба?



2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 150°, а боковая сторона равна 18. Чему равна площадь этого треугольника?

3. Периметр прямоугольника равен 17, а площадь равна 15. Чему равна диагональ этого прямоугольника?

4. Площадь ромба равна 32. Одна из диагоналей в 4 раза меньше другой. Какова её длина?

5. Средняя линия делит треугольник на треугольник и трапецию. Площадь трапеции равна 12. Какова площадь исходного треугольника?

6. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 30, 39 и 39.

7. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 10, 17 и 21.

8. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 21, а расстояние от вершины B до этой диагонали равно 12. Найдите площадь параллелограмма.

1

2

3

4

5

6

7

8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

1

2

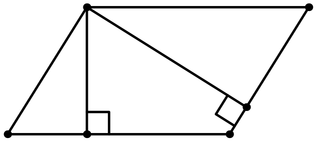
3

4

5

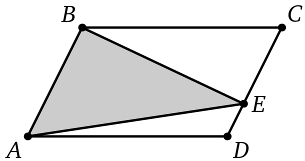
Тренировочная работа 4В

1. Периметр параллелограмма равен 70, а его длинная высота длиннее короткой в полтора раза. Чему равна самая длинная сторона параллелограмма?

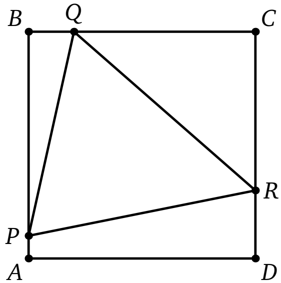


2. Высота равнобедренной трапеции равна 6, а диагональ равна 10. Найдите площадь трапеции.

3. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AEB равна 34.



4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 10. На его сторонах AB, BC и CD выбраны точки P, Q, R соответственно так, что $AP = 1$, $BQ = 2$ и $DR = 3$. Найдите площадь треугольника PQR.



5. Основания трапеции равны 4 и 25, боковые стороны 13 и 20. Найдите площадь трапеции.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

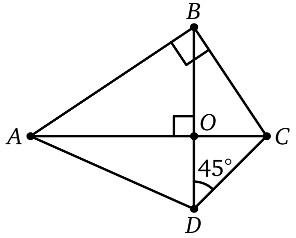
Ответы:

6. Стороны параллелограмма равны 3 и 4, а острый угол этого параллелограмма равен острому углу между его диагоналями. Найдите произведение диагоналей параллелограмма.

6

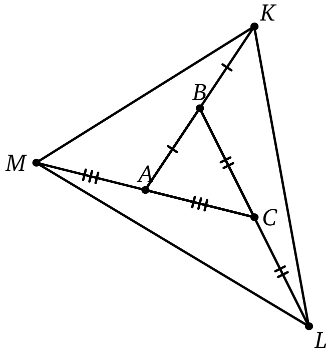
7. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом. Найдите площадь треугольника ADO, если $OB = 5$, $\angle ABC = 90°$ и $\angle CDB = 45°$.

7



8. Дан треугольник ABC площади 1. На продолжении его стороны AB за точку B выбрана точка K так, что $AB = BK$. На продолжении BC за точку C выбрана точка L так, что $BC = CL$, а на продолжении CA за точку A — точка M так, что $CA = AM$. Найдите площадь треугольника KLM.

8



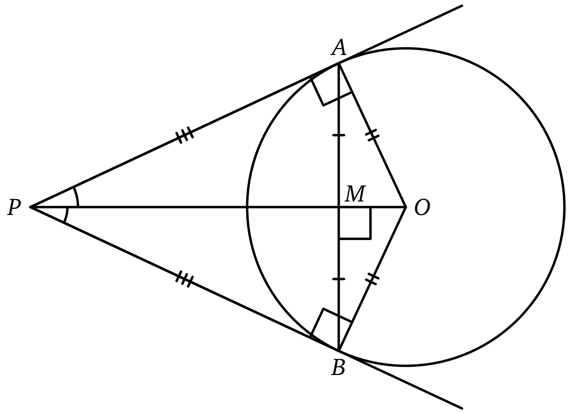
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Касательная к окружности. Вписанная окружность. Решения задач Д5.1—Д5.3 диагностической работы 1

Прямая называется *касательной к окружности*, если она имеет с ней ровно одну общую точку (точку касания). Радиус окружности, проведённый в эту точку, перпендикулярен касательной. Если прямая пересекает окружность в двух точках, она называется *секущей*.

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, можно провести к ней две касательные, PA и PB (A и B — точки касания). При этом образуется характерная конструкция, изображённая на рисунке (говорят, что окружность с центром O *вписана в угол* APB). Полезно помнить свойства этой фигуры:



$OA = OB$ (радиусы окружности равны);

$PA = PB$ (отрезки касательных равны);

$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ (касательная перпендикулярна радиусу);

PO — биссектриса угла APB и ось симметрии всего чертежа;

$\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$;

прямая PO перпендикулярна хорде AB и делит её пополам.

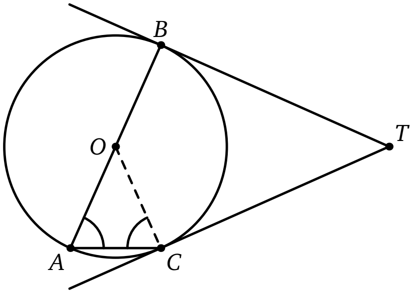
Разберём задачу **Д5.1**. Проведём радиус OC. Радиусы окружности равны, поэтому

$$\angle OCA = \angle OAC = 66^\circ.$$

По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle COB = 2 \cdot 66^\circ = 132^\circ.$$

Тогда $\angle CTB = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$.



Ответ: 48.

Разберём задачу **Д5.2**. В качестве чертежа к ней подойдёт рисунок на с. 44. Пусть $PA = 24$ и $AO = 7$, тогда по теореме Пифагора $PO = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. Теперь применим соотношение $AM \cdot OP = AO \cdot AP$ (напомним, что оно получается, если вычислить удвоенную площадь треугольника APO разными способами): $AM = \frac{24 \cdot 7}{25} = 6{,}72$. Тогда $AB = 2 \cdot PM = 13{,}44$.

Ответ: 13,44.

Говорят, что *окружность вписана в многоугольник*, если она касается всех его сторон. Такая окружность единственна, но существует не всегда, а только тогда, когда многоугольник выпуклый и биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке.

В любой треугольник можно вписать окружность. Окружность можно вписать также в любой правильный многоугольник. В четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он выпуклый и *суммы пар его противоположных сторон равны*. Так, например, из всех параллелограммов окружность можно вписать только в ромб.

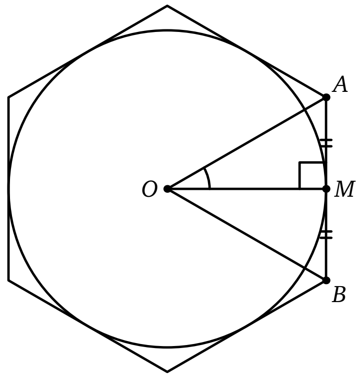
Для любого многоугольника, в который вписана окружность, справедлива простая формула, связывающая её радиус с площадью: $S = pr$ (напомним, что p — полупериметр). С её помощью можно найти радиус вписанной окружности. Для правильных многоугольников пользоваться этой формулой не стоит, радиус можно посчитать проще. Есть специальная удобная *формула для прямоугольного треугольника*: $r = \frac{a+b-c}{2}$ (a и b — катеты, c — гипотенуза).

Применяя общую формулу, можно легко решить задачу **Д5.3**. В самом деле, высота этого треугольника равна $\sqrt{5^2-3^2}=4$, так что его площадь $S=\frac{4\cdot 6}{2}=12$. Теперь находим $p=\frac{5+5+6}{2}=8$ и, наконец, $r=\frac{S}{p}=\frac{12}{8}=1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Для правильного многоугольника (треугольника, квадрата, шестиугольника) нет нужды в подсчёте площади, достаточно рассмотреть треугольник, образованный центром, вершиной и серединой стороны.

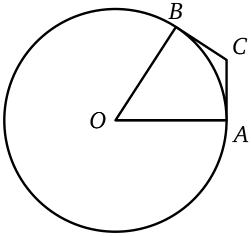
Для примера найдём радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{12}$. Рассмотрим центр O, сторону AB и её середину M. Так как $\angle AOB=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$, получаем, что $\angle MOA=30^\circ$ и $r=OM=AM\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{\sqrt{12}}{2}\cdot\sqrt{3}=3$.



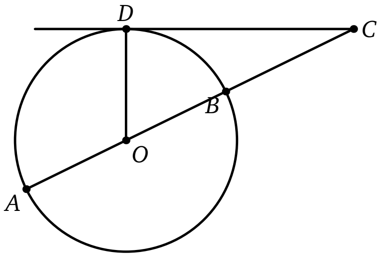
Ответы:

Тренировочная работа 5А

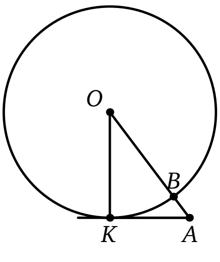
1. К окружности с центром O проведены касательные CA и CB. Найдите $\angle ACB$, если $\angle AOB = 57°$. Ответ дайте в градусах.



2. Из точки C к окружности с центром O проведены касательная CD и секущая CBA, проходящая через диаметр AB. Найдите $\angle DOA$, если $\angle BCD = 26°$. Ответ дайте в градусах.



3. Из точки A проведена касательная AK (K — точка касания) к окружности с центром O. Окружность пересекает отрезок AO в точке B. Известно, что $KO = 4$ и $KA = 3$. Найдите BA.



4. Периметр квадрата равен 13. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

1

2

3

4

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

5

6

7

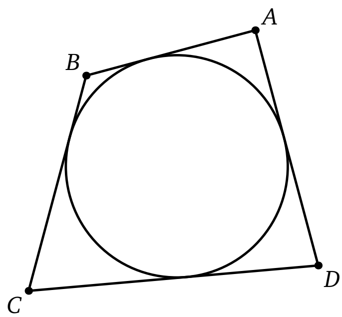
8

5. Высота равностороннего треугольника равна 24. Найдите диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

6. Острый угол ромба равен 30°, а радиус вписанной в него окружности равен 5,5. Найдите сторону ромба.

7. Найдите сторону правильного шестиугольника, в который вписан круг площадью 75π.

8. Окружность вписана в четырёхугольник $ABCD$. Найдите его периметр, если $AB = 5$ и $CD = 8$.



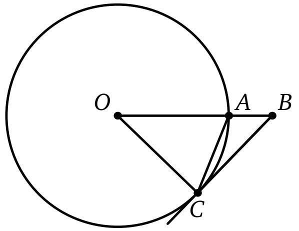
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

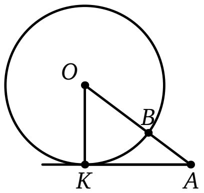
Ответы:

Тренировочная работа 5Б

1. BC — касательная к окружности с центром O (C — точка касания). Отрезок OB пересекает окружность в точке A. Известно, что $\angle ACB = 22^\circ$. Найдите $\angle COA$. Ответ дайте в градусах.



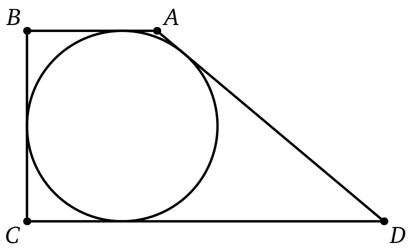
2. Из точки A проведена касательная AK (K — точка касания) к окружности с центром O. Окружность пересекает отрезок AO в точке B. Известно, что $BA = 2$ и $KA = 4$. Найдите радиус окружности.



3. В равнобедренную трапецию, средняя линия которой равна 6, вписана окружность. Найдите периметр трапеции.

4. Катет прямоугольного треугольника равен 7, а гипотенуза равна 25. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

5. Периметр прямоугольной трапеции равен 22, а более длинная из её боковых сторон равна 7. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найдите площадь трапеции.



1

2

3

4

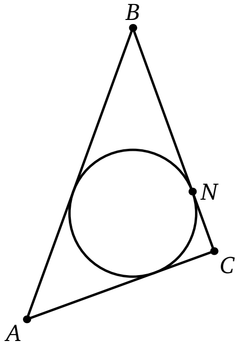
5

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

6

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его стороны BC в точке N. Известно, что $BN = 15$ и $AC = 17$. Найдите периметр треугольника.

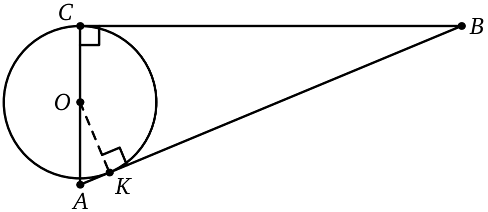


7

7. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 17$, $AC = 12$), касается его боковой стороны BC в точке S. Найдите BS.

8

8. ABC — прямоугольный треугольник с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$. Окружность, центр которой лежит на стороне AC, касается гипотенузы AB в точке K и катета BC в точке C. Найдите радиус этой окружности.



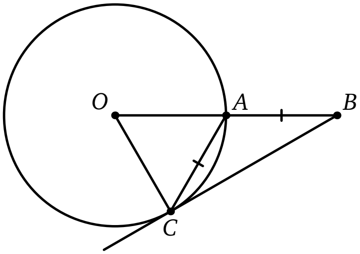
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 5B

1. BC — касательная к окружности с центром O (C — точка касания). Отрезок OB пересекает окружность в точке A. Известно, что $CA = AB$. Найдите $\angle COA$. Ответ дайте в градусах.

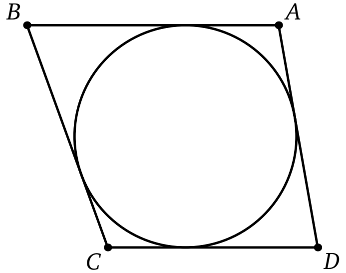


1

2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 11$, $CD = 15$. Найдите AD.

2

3. В трапецию площади 306 вписана окружность радиуса 9. Найдите длину средней линии трапеции.

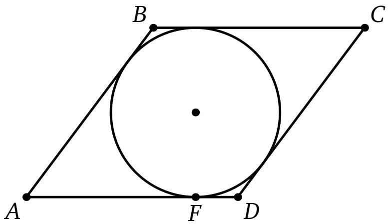


3

4. В тупоугольный равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности с одной из сторон треугольника делит её на отрезки длиной 9 и 56. Найдите площадь треугольника.

4

5. В ромб $ABCD$ вписана окружность, касающаяся стороны AD в точке F. Известно, что $AF = 4 \cdot FD$. Найдите косинус острого угла ромба.



5

Образец написания:

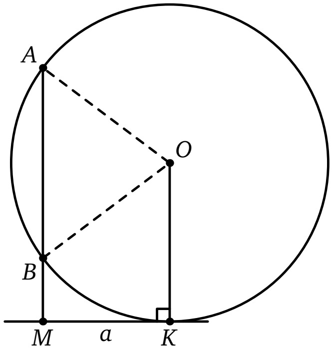
Ответы:

6

7

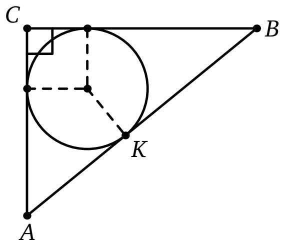
6. В треугольник ABC $(AB = 9,\ BC = 10,\ AC = 14)$ вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке E. Найдите AE.

7. К окружности с центром O проведена касательная a; K — точка касания. Хорда $AB = 9$ окружности параллельна OK, а её продолжение пересекает a в точке M, причём $MB = 3$. Найдите радиус окружности.



8

8. В прямоугольный треугольник вписана окружность, касающаяся его гипотенузы AB в точке K. Известно, что $AK = 3$ и $BK = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.



Образец написания:

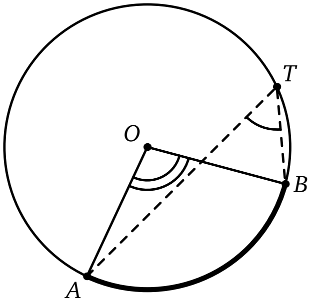
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Вписанный угол, описанная окружность. Решения задач Д6.1—Д6.3 диагностической работы 1

Теорема о вписанном угле и её следствия играют значительную роль в геометрии окружности. Эта техника применяется при решении доброй половины олимпиадных задач по планиметрии, от достаточно простых и до самых трудных. В этом разделе мы разберём несложные задачи на данную тему.

Пусть на окружности с центром O выбраны точки A и B. Они делят окружность на части, каждая из которых называется *дугой* окружности. Дуга напрямую связана со своим *центральным углом* AOB, который может быть не только меньше развёрнутого, но и больше или равен ему. *Величина дуги* равна величине её центрального угла. *Длина дуги* пропорциональна её величине и равна αR, где R — радиус окружности, а α — величина дуги, выраженная в радианах.

Если на окружности выбрать ещё точку P, то про угол APB говорят, что это *вписанный угол, опирающийся на дугу* AB (на ту из двух дуг AB, которая лежит внутри угла). Основное свойство вписанных углов описывается такой теоремой.

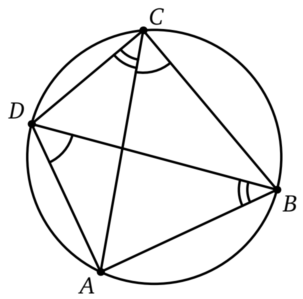


Теорема о вписанном угле. *Величина вписанного угла равна половине величины дуги, на которую этот угол опирается*: $\angle ATB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB} = \frac{1}{2}\angle AOB$.

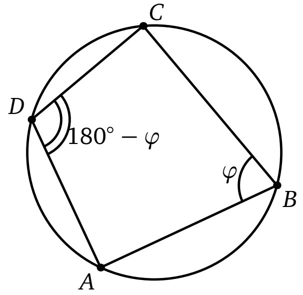
Про *хорду* AB говорят, что она *стягивает* дугу AB. Ясно, что если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды. А обратное, вообще говоря, неверно, поскольку одна и та же хорда стягивает две различные дуги. Поэтому, чтобы избежать неоднозначности, о вписанном угле принято говорить именно «опирается на дугу» AB (указывая, на какую из двух), а не «опирается на хорду» AB.

Связь между длиной a хорды, стягивающей дугу окружности радиуса R, и вписанным углом α, опирающимся на эту дугу, даёт *теорема синусов*: $a = 2R\sin\alpha$. Важно знать и основные следствия из теоремы о вписанном угле.

Все углы, вписанные в данную окружность и опирающиеся на одну дугу, равны. Так, во *вписанном четырёхугольнике* $ABCD$ справедливы равенства $\angle ADB = \angle ACB$, $\angle DCA = \angle DBA$ и так далее. Можно показать, что если в выпуклом четырёхугольнике выполняется любое из подобных равенств, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

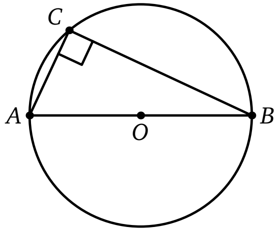


Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°. И наоборот, если для выпуклого четырёхугольника выполняется это свойство, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность.

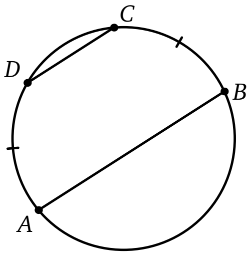


Из этого признака легко вывести, что среди параллелограммов вписанными в окружность являются только прямоугольники, а среди трапеций — равнобедренные трапеции.

Угол, опирающийся на диаметр, прямой. (Строго говоря, надо было бы сказать «опирающийся на полуокружность», но в случае диаметра нет неоднозначности с дугами, и такую вольность речи допускают.)



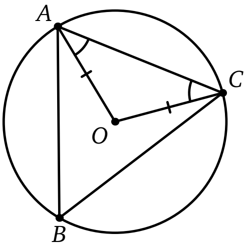
Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.



Решим задачу **Д6.1**. Если обозначить величину меньшей из дуг через α, то бо́льшая будет равна $2{,}6\alpha$. Сумма же этих величин равна величине всей окружности, то есть $360°$. Поэтому $3{,}6\alpha = 360°$ и $\alpha = 100°$.

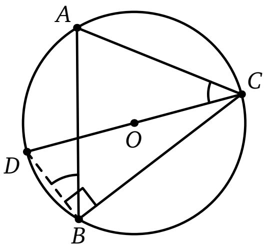
Ответ: 100.

Перейдём к задаче **Д6.2**. Если провести радиус OA, то образуется равнобедренный треугольник AOC, углы при основании которого равны по $37°$, а тогда $\angle AOC = 180° - 2\cdot 37° = 106°$. Это центральный угол для дуги CA, то есть сама дуга также равна $106°$, а опирающийся на неё вписанный угол $\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 106° = 53°$.

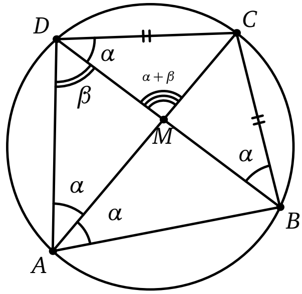


Ответ: 53.

Можно рассуждать по-другому, продлив OC до диаметра DC. Тогда $\angle DBA = \angle DCA = 37°$ (эти углы равны, так как опираются на дугу AD). Кроме того, $\angle CBD = 90°$ как опирающийся на диаметр. Поэтому $\angle ABC = 90° - 37° = 53°$.



В заключение разберём задачу **Д6.3**. Обозначим точку пересечения диагоналей буквой M. Из равенства сторон следует равенство дуг BC и CD, а тогда равны и опирающиеся на них углы, поэтому мы можем обозначить $\angle CBD = \angle CAD = \angle BAC = \angle BDC = \alpha$. Пусть также $\angle ADB = \beta$, тогда по условию $\alpha + \beta = 93°$. Нас интересует, например, угол CMD, он по теореме о внешнем угле, применённой к треугольнику ADM, равен $\angle MAD + \angle ADM = \alpha + \beta = 93°$. Но это тупой угол, а в задаче требуется найти острый, то есть ответом будет смежный с ним угол $\angle DMA = 180° - 93° = 87°$.

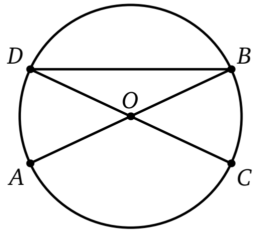


Ответ: 87.

Ответы:

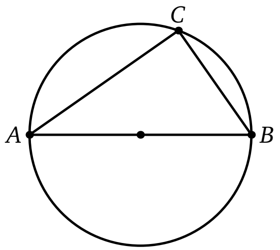
Тренировочная работа 6А

1. AB и CD — диаметры окружности, $\angle AOC = 130^\circ$. Найдите $\angle ABD$. Ответ дайте в градусах.



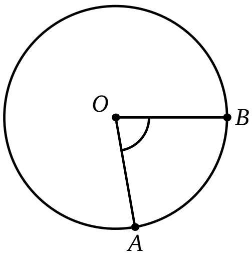
1

2. В окружности радиусом 4 проведён диаметр AB. Точка C выбрана на окружности так, что $AC = \sqrt{39}$. Найдите BC.



2

3. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 80^\circ$. Длина меньшей дуги AB равна 26. Найдите длину окружности.



3

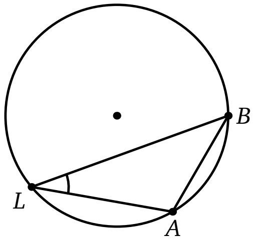
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

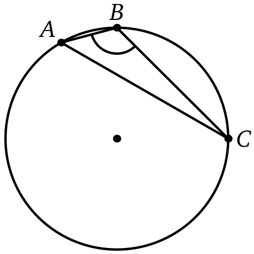
4

4. Найдите величину вписанного в окружность острого угла ALB, если длина хорды AB равна радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.



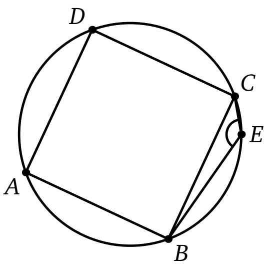
5

5. Треугольник ABC, у которого $\angle ABC = 120^\circ$, вписан в окружность радиусом $2\sqrt{3}$. Найдите AC.



6

6. В одну и ту же окружность вписаны квадрат $ABCD$ и треугольник BEC, у которого $\angle BEC$ тупой. Найдите величину этого угла. Ответ дайте в градусах.

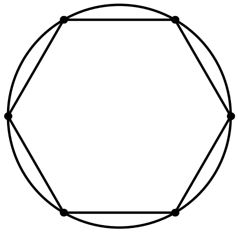


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

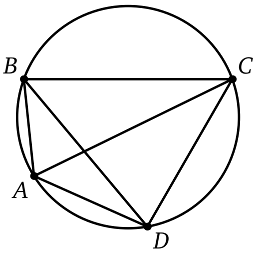
Ответы:

7. Найдите радиус окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника со стороной 2.



7

8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Найдите бо́льшую из дуг AC, если $\angle ABD = 34^\circ$ и $\angle CAD = 50^\circ$. Ответ дайте в градусах.



8

Образец написания:

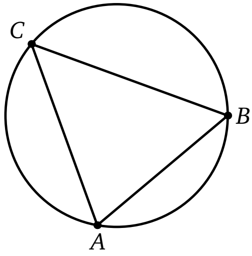
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 6Б

1

1. Треугольник ABC вписан в окружность. Известно, что $\angle ACB = 50°$ и $\angle ABC = 60°$. Найдите величину той из дуг BC, которая не содержит точки A. Ответ дайте в градусах.



2

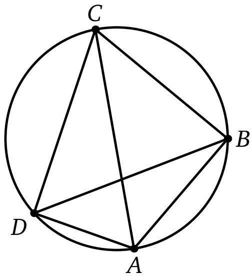
2. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$. Найдите AD.

3

3. На берегу круглого озера расположены два причала A и B. Если рыбак Андрей идёт берегом от A к B в одном направлении, он проходит π км, а если в противоположном направлении — 5π км. Сколько километров Андрей проплывёт на лодке напрямую от A к B?

4

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его стороны AB, BC, CD стягивают дуги в $81°$, $101°$, $121°$ соответственно. Под каким острым углом пересекаются диагонали четырёхугольника? Ответ дайте в градусах.

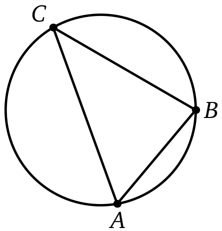


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

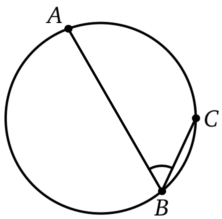
Ответы:

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Известно, что меньшие дуги AB, BC, CA относятся как $2:3:4$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



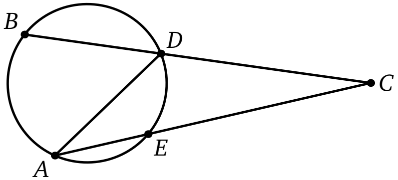
5

6. Найдите величину вписанного угла ABC, опирающегося на дугу, длина которой равна $\frac{11}{36}$ длины окружности. Ответ дайте в градусах.



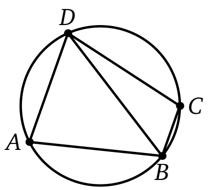
6

7. Из точки C, лежащей вне окружности, к ней проведены секущие CDB и CEA. Известно, что $\angle ACB = 31°$, а дуга AB, не содержащая точки D, равна $104°$. Найдите $\angle DAE$. Ответ дайте в градусах.



7

8. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана в окружность, причём меньшая дуга BC равна $39°$, а меньшая дуга AD равна $93°$. Найдите $\angle ADB$. Ответ дайте в градусах.



8

Образец написания:

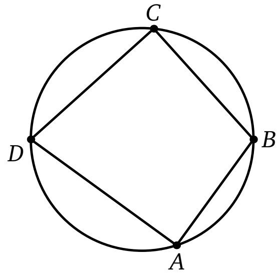
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Тренировочная работа 6В

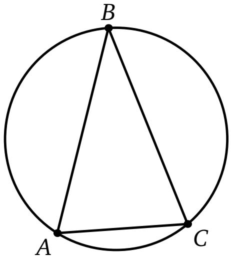
1

1. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD, DA, величины которых относятся как $6:7:8:9$. Найдите наибольший угол четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.



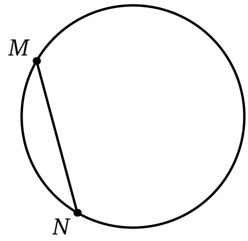
2

2. Треугольник ABC вписан в окружность, причём величина каждого из углов A и C равна величине дуги AC. Найдите эту величину. Ответ дайте в градусах.



3

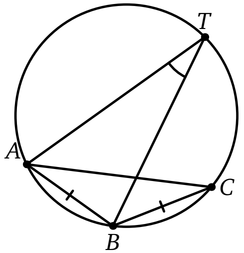
3. Точки M и N лежат на окружности и делят её на две дуги, одна из которых втрое короче другой. Известно, что $MN = 5$. Найдите площадь S круга, ограниченного данной окружностью. В ответе укажите число $\dfrac{S}{\pi}$.



Образец написания:

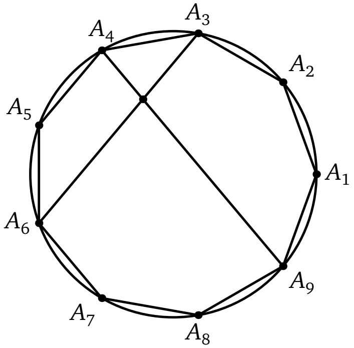
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

4. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с $\angle ABC = 123°$. Точка T на окружности выбрана так, что хорды BT и AC пересекаются. Найдите $\angle ATB$. Ответ дайте в градусах.

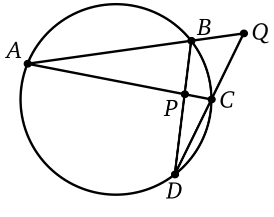


5. Площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна $54\sqrt{3}$. Какова площадь квадрата, вписанного в ту же окружность?

6. Правильный девятиугольник $A_1A_2\ldots A_9$ вписан в окружность. Под каким острым углом пересекаются его диагонали A_4A_9 и A_3A_6? Ответ дайте в градусах.



7. Точки A, B, C, D в указанном порядке расположены на окружности. Хорды AC и BD пересекаются в точке P, а лучи AB и DC — в точке Q. Найдите $\angle BAC$, если $\angle APD = 94°$, а $\angle AQD = 56°$. Ответ дайте в градусах.



4

5

6

7

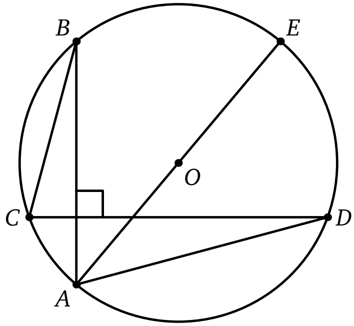
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

8

8. Хорды AB и CD окружности перпендикулярны друг другу, AE — диаметр. Найдите AE, если $AD = \sqrt{87}$ и $BC = \sqrt{57}$.

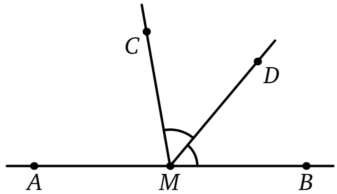


Образец написания:

Диагностическая работа 2

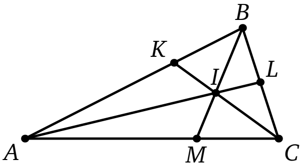
Ответы:

2.1. На прямой AB взята точка M, лежащая между A и B. Луч MD — биссектриса $\angle CMB$. Известно, что $\angle CMA = 75°$. Найдите $\angle DMC$. Ответ дайте в градусах.



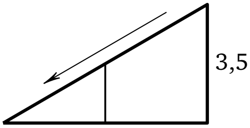
2.1

2.2. Биссектрисы AL, BM, CK треугольника ABC пересекаются в точке I. Найдите $\angle MIA$, если известно, что $\angle BAC = 27°$ и $\angle BCA = 72°$. Ответ дайте в градусах.



2.2

2.3. Столб подпирает детскую горку посередине. Найдите высоту столба, если высота горки равна 3,5 м. Ответ дайте в метрах.



2.3

2.4. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\sin A = \frac{1}{6}$ и $BC = 3$. На гипотенузу опущена высота CH. Найдите HA.

2.4

2.5. Основания равнобедренной трапеции равны 4 и 34, а боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

2.5

2.6. Один из катетов прямоугольного треугольника равен $2\sqrt{6}$, а сумма другого катета и гипотенузы равна 12. Найдите длину гипотенузы.

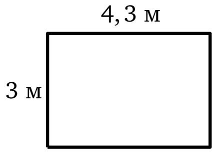
2.6

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

2.7

2.7. На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 12,5 м^2. Точные измерения показали, что длина комнаты равна 4,3 м, а ширина — 3 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного на плане?

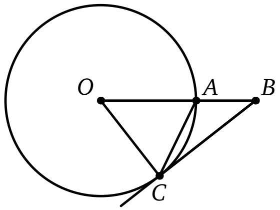


2.8

2.9

2.8. Площадь параллелограмма равна 280, а его стороны равны 20 и 35. Найдите наибольшую высоту параллелограмма.

2.9. BC — касательная к окружности с центром O (C — точка касания). Отрезок OB пересекает окружность в точке A. Известно, что $\angle ACB = 26°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.

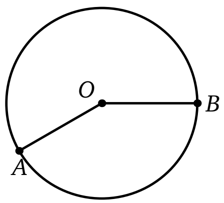


2.10

2.11

2.10. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18. В эту трапецию можно вписать окружность. Каков радиус окружности?

2.11. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB = 150°$. Бо́льшая и меньшая дуги AB различаются по длине на 6 см. Найдите длину большей дуги. Ответ выразите в сантиметрах.

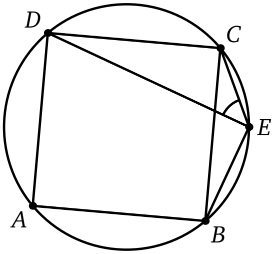


Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

2.12. В одну и ту же окружность вписаны квадрат $ABCD$ и треугольник BEC, у которого $\angle BEC$ тупой. Найдите $\angle CED$. Ответ дайте в градусах.



2.12

Образец написания:

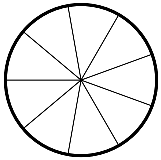
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Диагностическая работа 3

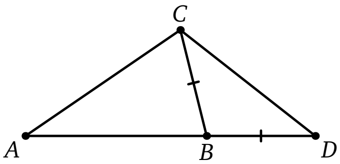
3.1

3.1. На рисунке изображено колесо с девятью спицами. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину наименьшего угла (в градусах), который образуют соседние спицы.



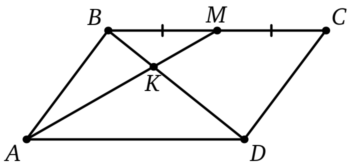
3.2

3.2. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 40^\circ$ и $\angle C = 64^\circ$. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D так, что $DB = BC$. Найдите $\angle ADC$. Ответ дайте в градусах.



3.3

3.3. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке K. Найдите DK, если $BD = 36$.



3.4

3.4. Сумма двух углов ромба равна 240°, а его периметр равен 24. Найдите длину короткой диагонали ромба.

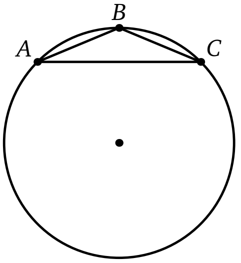
3.5

3.5. Одна сторона трапеции равна 23, а все остальные по 13. Найдите высоту трапеции.

Образец написания:

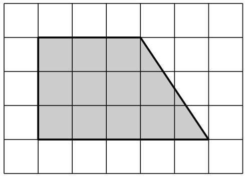
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

3.6. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13$ и $AC = 24$. Найдите диаметр окружности, описанной вокруг этого треугольника.



3.6

3.7. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат со стороной 1 м. Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



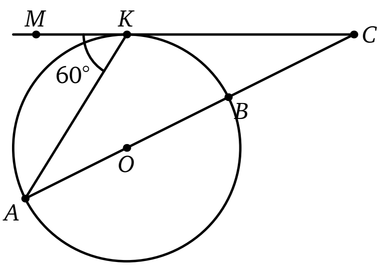
3.7

3.8. Основания трапеции равны 7 и 19, а два из её углов равны по 45°. Найдите площадь трапеции.

3.8

3.9. Из точки C проведена касательная CK (K — точка касания) к окружности с центром O. На продолжении отрезка CK за точку K отмечена точка M. Окружность пересекает отрезок CO в точке B, а его продолжение — в точке A. Известно, что $\angle AKM = 60°$ и $AB = 11$. Найдите AC.

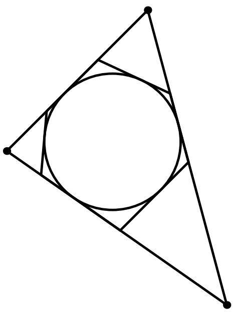
3.9



Образец написания:

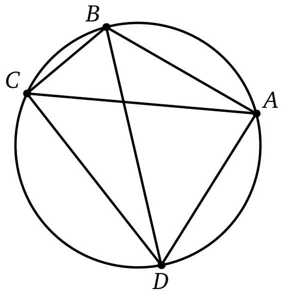
3.10

3.10. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсечённых треугольников равны 5, 7 и 13. Найдите периметр треугольника ABC.



3.11

3.11. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle CBA = 110^\circ$ и $\angle ACD = 47^\circ$. Найдите $\angle CAD$. Ответ дайте в градусах.



3.12

3.12. Основания трапеции равны 0,5 и 12,5. В эту трапецию можно вписать окружность, а также вокруг неё можно описать окружность. Найдите площадь трапеции.

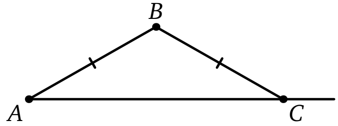
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 4

Ответы:

4.1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$. Внешний угол при вершине C равен 145°. Найдите $\angle B$. Ответ дайте в градусах.



4.1

4.2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 24°. Найдите угол между биссектрисой и высотой этого треугольника, проведёнными к одной и той же боковой стороне. Ответ дайте в градусах.

4.2

4.3. Масштаб карты таков, что в одном сантиметре 8,5 км. Чему равно (в километрах) расстояние между деревнями А и В, если на карте оно составляет 8,5 см?

4.3

4.4. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 9{,}6$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите периметр треугольника.

4.4

4.5. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 10, а её высота равна $2\sqrt{10}$. Найдите длину боковой стороны трапеции.

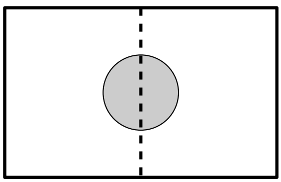
4.5

4.6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $5\sqrt{2}$, а один из его катетов на 6 превышает другой. Найдите больший катет этого треугольника.

4.6

4.7. Два садовода, имевшие участки прямоугольной формы размерами 24 м на 30 м, договорились и сделали общий круглый пруд площадью 140 м^2, центр которого лежит точно на границе участков. Какова площадь (в квадратных метрах) оставшейся части участка каждого из садоводов?

4.7



4.8. Найдите площадь треугольника со сторонами 14, $\sqrt{74}$ и $\sqrt{74}$.

4.8

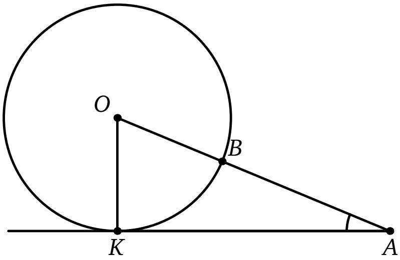
Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

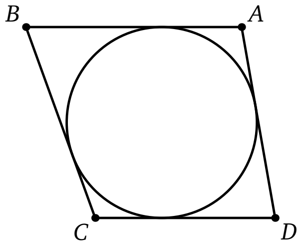
4.9

4.9. Из точки A проведена касательная AK (K — точка касания) к окружности с центром O. Окружность пересекает отрезок AO в точке B. Известно, что $\operatorname{tg}\angle OAK = \frac{5}{12}$. Найдите $\frac{OB}{BA}$.



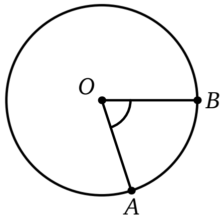
4.10

4.10. В трапецию, боковые стороны которой равны 9 и 10, вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.



4.11

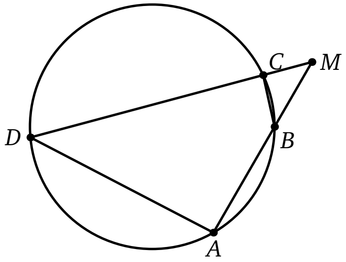
4.11. На окружности с центром O отмечены точки A и B. Бо́льшая дуга AB равна 28 см, а меньшая равна 7 см. Найдите $\angle AOB$. Ответ дайте в градусах.



Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

4.12. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, причём лучи AB и DC пересекаются в точке M. Известно, что $\angle AMD = 45^\circ$ и дуга DA (не содержащая точки C) равна 115°. Найдите величину меньшей дуги BC. Ответ дайте в градусах.



Ответы:

4.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

5.1

5.2

5.3

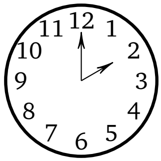
5.4

5.5

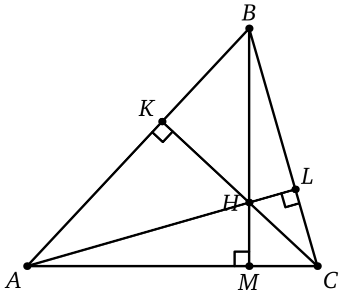
Образец написания: 1234567890-,

Диагностическая работа 5

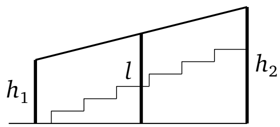
5.1. Какой угол (в градусах) образуют часовая и минутная стрелки в 14.00?



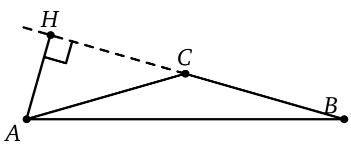
5.2. Высоты AL, BM, CK треугольника ABC пересекаются в точке H. Найдите $\angle CHL$, если известно, что $\angle BAC = 47^\circ$ и $\angle BCA = 74^\circ$. Ответ дайте в градусах.



5.3. Перила лестницы дачного дома для надёжности закреплены посередине вертикальным столбом. Найдите высоту l (в метрах) этого столба, если наименьшая высота перил h_1 равна 1,2 м, а наибольшая высота перил h_2 равна 2,2 м.



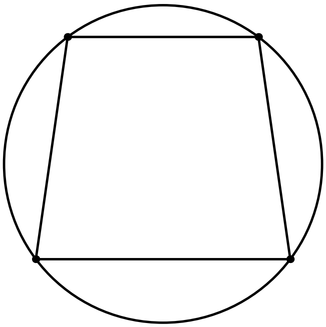
5.4. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 4\sqrt{15}$ и $\sin\angle BAC = 0{,}25$. Найдите длину высоты AH.



5.5. В прямоугольном треугольнике ABC известны гипотенуза $AB = \sqrt{43}$ и катет $AC = \sqrt{7}$. Найдите длину медианы AM этого треугольника.

Ответы:

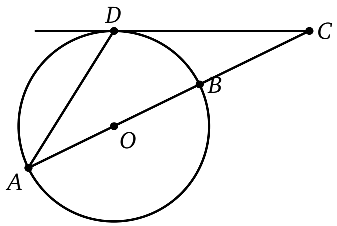
5.6. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 8, а радиус описанной вокруг неё окружности равен 5. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.



5.7. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5 м и 8 м, требуется покрыть дощечками размером 5 см × 40 см. Сколько понадобится дощечек?

5.8. Найдите площадь ромба, высота которого равна 13, а острый угол 30°.

5.9. Из точки C, лежащей на продолжении диаметра AB окружности за точку B, проведена касательная CD (D — точка касания). Известно, что $\angle CAD = 32°$ Найдите $\angle ACD$. Ответ дайте в градусах.



5.10. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 12. В эту трапецию можно вписать окружность радиуса 4. Найдите длину большей боковой стороны этой трапеции.

5.6

5.7

5.8

5.9

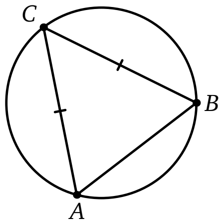
5.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

5.11

5.11. В окружность вписан равнобедренный ($AC = BC$) треугольник ABC. Меньшая дуга AB равна $105°$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



5.12

5.12. В треугольнике ABC известны высота $CH = 5$ и стороны $CA = 6$ и $CB = 7$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы

Диагностическая работа 1

Д1.1. 70. **Д1.2.** 38. **Д1.3.** 127. **Д2.1.** 2. **Д2.2.** 10. **Д2.3.** 24. **Д3.1.** 17. **Д3.2.** 12. **Д3.3.** 21,125. **Д4.1.** 32. **Д4.2.** 2,75. **Д4.3.** 7,875. **Д5.1.** 48. **Д5.2.** 13,44. **Д5.3.** 1,5. **Д6.1.** 100. **Д6.2.** 53. **Д6.3.** 87.

Тренировочная работа 1А

1. 62,5. **2.** 144. **3.** 126. **4.** 150. **5.** 71. **6.** 68,5. **7.** 106. **8.** 7.

Тренировочная работа 1Б

1. 18. **2.** 81. **3.** 23. **4.** 42. **5.** 80. **6.** 135. **7.** 70. **8.** 81.

Тренировочная работа 1В

1. 170. **2.** 1,5. **3.** 56. **4.** 36. **5.** 45. **6.** 54. **7.** 45. **8.** 15.

Тренировочная работа 2А

1. 3,5. **2.** 5. **3.** 9. **4.** 7. **5.** 0,28. **6.** 12,5. **7.** 5. **8.** 5,5.

Тренировочная работа 2Б

1. 2. **2.** 0,8. **3.** 0,5. **4.** 18,75. **5.** 35. **6.** 1,375. **7.** 12,6. **8.** 18.

Тренировочная работа 2В

1. 18. **2.** 1,5. **3.** 60. **4.** 1. **5.** 12. **6.** 15. **7.** 5. **8.** 4,8.

Тренировочная работа 3А

1. 24. **2.** 24. **3.** 13. **4.** 40. **5.** 0,96. **6.** 9. **7.** 48. **8.** 10.

Тренировочная работа 3Б

1. 17. **2.** 148. **3.** 8. **4.** 10. **5.** 28. **6.** 5. **7.** 1. **8.** 60.

Тренировочная работа 3В

1. 5. **2.** 14. **3.** 12. **4.** 50. **5.** 11. **6.** 26. **7.** 5. **8.** 0,21875.

Тренировочная работа 4А

1. 728. **2.** 17,5. **3.** 60,5. **4.** 8,75. **5.** 7. **6.** 24. **7.** 30. **8.** 48.

Тренировочная работа 4Б

1. 5,5. **2.** 81. **3.** 6,5. **4.** 4. **5.** 16. **6.** 540. **7.** 84. **8.** 252.

Тренировочная работа 4В

1. 21. **2.** 48. **3.** 68. **4.** 43. **5.** 174. **6.** 24. **7.** 12,5. **8.** 7.

Тренировочная работа 5А

1. 123. **2.** 116. **3.** 1. **4.** 1,625. **5.** 16. **6.** 22. **7.** 10. **8.** 26.

Тренировочная работа 5Б

1. 44. **2.** 3. **3.** 24. **4.** 3. **5.** 22. **6.** 64. **7.** 11. **8.** 2,4.

Тренировочная работа 5В

1. 60. **2.** 14. **3.** 17. **4.** 1848. **5.** 0,6. **6.** 6,5. **7.** 7,5. **8.** 12.

Тренировочная работа 6А

1. 25. **2.** 5. **3.** 117. **4.** 30. **5.** 6. **6.** 135. **7.** 2. **8.** 192.

Тренировочная работа 6Б

1. 140. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 79. **5.** 80. **6.** 55. **7.** 21. **8.** 57.

Тренировочная работа 6В

1. 102. **2.** 72. **3.** 12,5. **4.** 28,5. **5.** 72. **6.** 80. **7.** 19. **8.** 12.

Диагностическая работа 2

2.1. 52,5. **2.2.** 54. **2.3.** 1,75. **2.4.** 17,5. **2.5.** 0,8. **2.6.** 7. **2.7.** 0,4. **2.8.** 14. **2.9.** 38. **2.10.** 6. **2.11.** 21. **2.12.** 45.

Диагностическая работа 3

3.1. 40. **3.2.** 38. **3.3.** 24. **3.4.** 6. **3.5.** 12. **3.6.** 33,8. **3.7.** 12. **3.8.** 78. **3.9.** 16,5. **3.10.** 25. **3.11.** 63. **3.12.** 16,25.

Диагностическая работа 4

4.1. 110. **4.2.** 27. **4.3.** 72,25. **4.4.** 19,6. **4.5.** 6,5. **4.6.** 7. **4.7.** 650. **4.8.** 35. **4.9.** 0,625. **4.10.** 9,5. **4.11.** 72. **4.12.** 25.

Диагностическая работа 5

5.1. 60. **5.2.** 59. **5.3.** 1,7. **5.4.** 7,5. **5.5.** 4. **5.6.** 7. **5.7.** 2000. **5.8.** 338. **5.9.** 26. **5.10.** 10. **5.11.** 63,75. **5.12.** 4,2.

Содержание